CHUYÊN ĐỀ LUYỆN THI ĐẠI HỌC MÔN TOÁN

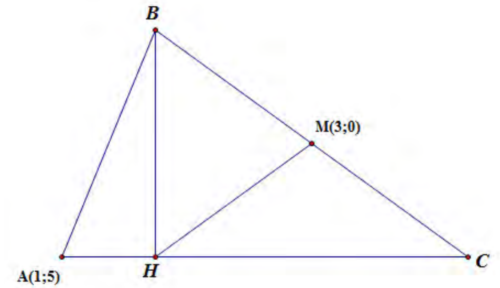
TUYỂN TẬP HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG MẶT PHẲNG HAY VÀ ĐẶC SẮC - WWW.TOANMATH.COM

Giáo viên : Nguyễn Minh Tiến

Hà Nội

Đề bài 01 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $A(1;5)$, điểm B nằm trên đường thẳng $(d_1): 2x+y+1=0$ và chân đường cao hạ đỉnh B xuống đường thẳng AC nằm trên đường thẳng $(d_2): 2x+y-8=0$. Biết điểm $M(3;0)$ là trung điểm của cạnh BC. Tìm tọa độ các đỉnh B và C của tam giác.

Lời giải tham khảo :



Gọi điểm $B(a;-2a-1) \in (d_1)$

Điểm $H(b;8-2b) \in (d_2)$

Ta có M là trung điểm của BC $\Rightarrow C(6-a;2a+1)$

Ta có $H \in AC$ nên $\overrightarrow{AH}$ và $\overrightarrow{HC}$ cùng phương

$\overrightarrow{AH} = (b-1;3-2b)$ và $\overrightarrow{HC} = (6-a-b;2a+2b-7)$

$\overrightarrow{AH}$ và $\overrightarrow{HC}$ cùng phương $\Rightarrow \dfrac{b-1}{6-a-b} = \dfrac{3-2b}{2a+2b-7} \Leftrightarrow a = 11-6b$ (1)

H là chân đường cao hạ từ B xuống AC $\Rightarrow AH \perp BH \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BH} = 0$

$\overrightarrow{BH} = (b-a;2a-2b+9) \Rightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BH} = 0 \Leftrightarrow (b-1)(b-a) + (3-2b)(2a-2b+9) = 0$

$$\Leftrightarrow 5b^2 - 5ab - 25ab + 7a + 27 = 0 \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta được $5b^2 - 5b(11-6b) - 25b + 7(11-6a) + 27 = 0$

$$\Leftrightarrow 35b^2 - 122b + 104 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 2 \\ b = \dfrac{52}{35} \end{array}\right.$$

Thay ngược lại ta có điểm **B** và **C** cần tìm

Đề bài 02 : Trong hệ tọa độ Oxy hình thang cân ABCD có diện tích bằng $\dfrac{45}{2}$, đáy lớn CD nằm trên đường thẳng $(d): x-3y-3=0$. Biết hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau và cắt nhau tại điểm $I(2;3)$. Viết phương trình đường thẳng BC biết điểm C có hoành độ dương.

Lời giải tham khảo :

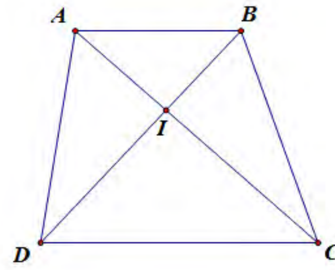
ABCD là hình thang cân $\Rightarrow$ tam giác ICD vuông cân tại I

Ta có $CD = 2d(I;CD) = 2.\dfrac{|2-3.3-3|}{\sqrt{10}} = 2\sqrt{10} \Rightarrow IC = \sqrt{20}$

Lấy $C(3a+3;a) \in (d) \Rightarrow IC^2 = (3a+1)^2 + (a-3)^2 = 20 \Leftrightarrow a = \pm 1 \Rightarrow C(6;1)$

Phương trình BD đi qua điểm I và nhận $\overrightarrow{IC}$ làm vtpt $\Rightarrow BD: 2x-y-1=0$

D là giao điểm của BD và CD $\Rightarrow D(0;-1)$



Đặt $IA = IB = x \Rightarrow S_{IAB} = \frac{1}{2}x^2; S_{IAD} = x\sqrt{5} = S_{IBC}; S_{ICD} = 10$

$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}x^2 + 2x\sqrt{5} + 10 = \frac{45}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = \sqrt{5} & (tm) \\ x = -5\sqrt{5} & (loai) \end{array}\right.$

$\Rightarrow \frac{DI}{IB} = 2 \Rightarrow \overrightarrow{DI} = 2\overrightarrow{IB}$ $(*)$

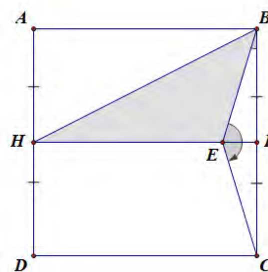
Gọi $B(b; 2b-1) \in BD$ từ $(*) \Rightarrow B(3; 5)$

Phương trình đường thẳng BC đi qua B và C $\Rightarrow BC : 4x + 3y - 27 = 0$.

Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 03 (k2pi Lần 15 - 2014) : Trong hệ tọa độ Oxy cho hình vuông ABCD có phương trình đường thẳng AD là $(d) : 3x - 4y - 7 = 0$. Gọi E là điểm nằm bên trong hình vuông ABCD sao cho tam giác EBC cân có $\widehat{BEC} = 150^o$. Viết phương trình đường thẳng AB biết điểm $E(2; -4)$.

Lời giải tham khảo :



Tam giác BEC cân và có $\widehat{BEC} = 150^o \Rightarrow$ tam giác BEC cân tại E

Gọi H là hình chiếu của E lên AD $\Rightarrow$ H là trung điểm của AD và $HE = d(E; AD) = 3$

Đặt cạnh hình vuông là $AB = x$

Tam giác BEC cân tại E có $\widehat{BEC} = 150^o \Rightarrow \widehat{EBC} = 15^o$. Gọi I là trung điểm của BC $\Rightarrow BI = \frac{x}{2}; EI = x - 3$

Tam giác BIE vuông tại I có góc $\widehat{EBI} = 15^o \Rightarrow \tan 15^o = \frac{EI}{BI} = \frac{2x-6}{x}$

$\Rightarrow 2-\sqrt{3}=\dfrac{2x-6}{x} \Leftrightarrow x=2\sqrt{3}$

Phương trình đường thẳng EH qua điểm E và vuông góc với AD $\Rightarrow EH: 4x+3y+4=0$

Đường thẳng AB // EH $\Rightarrow$ AB có dạng $(d): 4x+3y+\alpha=0$

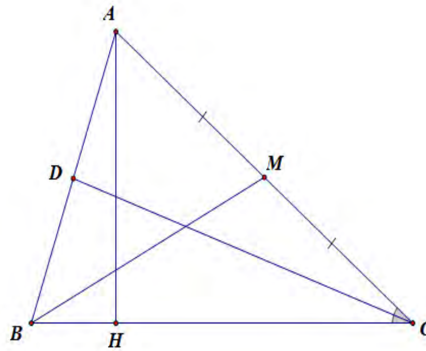
Ta có $d(E, AB)=\dfrac{|\alpha-4|}{5}=BI=\sqrt{3} \Leftrightarrow \alpha=4 \pm 5\sqrt{3}$

Phương trình đường thẳng AB là $(d): 4x+3y+4 \pm 5\sqrt{3}=0$

Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 04 : Trong hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác ABC biết đường cao kẻ từ A, trung tuyến kẻ từ B và phân giác kẻ từ C có phương trình lần lượt là $(d_1): 3x-4y+27=0; (d_2): 4x+5y-3=0; (d_3): x+2y-5=0$. Xác định tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải tham khảo :



Ta có $AH \perp BC \Rightarrow BC$ có vtcp là $\overrightarrow{u_4}=(3;-4)$

Gọi $\overrightarrow{u_5}=(a;b)$ là vtcp của đường thẳng AC. Ta có CD là phân giác trong góc C

$\Rightarrow \cos(\overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{u_4})=\cos(\overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{u_5})$ $\qquad \overrightarrow{u_3}=(2;-1)$

$$\Rightarrow \frac{|2a-b|}{\sqrt{5}.\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}.\sqrt{25}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=-\dfrac{4}{3}a \end{array}\right.$$

Với $b=-\dfrac{4}{3}a \Rightarrow$ chọn $\overrightarrow{u_5}=(3;-4)$ loại vì trùng với $\overrightarrow{u_4}$

Với $b=0 \Rightarrow \overrightarrow{u_5}=(1;0)$

Điểm $A \in (d_1) \Rightarrow A(-1+4a; 6+3a)$ và $C \in (d_3) \Rightarrow C(5-2c; c) \Rightarrow \overrightarrow{AC}=(6-2c-4a; c-3a-6)$

Ta có $\overrightarrow{u_5}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương $\Rightarrow c-3a-6=0$ $\qquad (1)$

M là trung điểm của AC $\Rightarrow M\left(\dfrac{4a+4-2c}{2}; \dfrac{3a+c+6}{2}\right)$. Trung điểm M thuộc (d_2)

$\Rightarrow 4.\dfrac{4a+4-2c}{2}+5.\dfrac{3a+c+6}{2}-3=0 \Leftrightarrow 31a-3a+40=0$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow a=1; c=3 \Rightarrow A(-5;3); C(-1;3)$

Phương trình đường thẳng BC đi qua C và vuông góc với AH $\Rightarrow BC: 4x+3y-5=0$

B là giao điểm của BM và BC $\Rightarrow B(2;-1)$

Bài toán cở bản : Biết tọa độ 3 đỉnh tam giác tìm tọa độ tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác. Tâm $I\left(-3;-\dfrac{13}{8}\right)$ và $R=\dfrac{5\sqrt{65}}{8}$.

Đề bài 05 : Trong hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác ABC cân tại A có phương trình đường thẳng chứa các cạnh AB và BC lần lượt là $(d_1): 7x-y+17=0; (d_2): x-3y-9=0$. Viết phương trình đường cao xuất phát từ đỉnh C của tam giác ABC biết điểm $M(2;-1)$ nằm trên đường thẳng AC.

Lời giải tham khảo :

Đường thẳng AB có vtpt là $\overrightarrow{n_1}=(7;-1)$, BC có vtpt là $\overrightarrow{n_2}=(1;-3)$

Gọi $\overrightarrow{n_3}=(a;b)$ là vtpt của đường thẳng AC

Tam giác ABC cân tại A $\Rightarrow \cos(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2})=\cos(\overrightarrow{n_2},\overrightarrow{n_3}) \Rightarrow \dfrac{10}{\sqrt{50}.\sqrt{10}}=\dfrac{|a-3b|}{\sqrt{10}.\sqrt{a^2+b^2}}$

$\Leftrightarrow a^2+6ab-7b^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=-7b \end{array}\right.$

✓ Với $a=-7b$ chọn $\overrightarrow{n_3}=(7;-1)$ loại vì cùng phương với $\overrightarrow{n_1}$

✓ Với $a=b$ chọn $\overrightarrow{n_3}=(1;1) \Rightarrow$ đường thẳng $AC: x+y-1=0$

Tọa độ C là giao điểm của BC và AC $\Rightarrow C(3;-2)$

Phương trình đường cao xuất phát từ C là $(d): x+7y+11=0$.

Đề bài 06 : Trong hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác ABC có phương trình đường cao và đường phân giác trong xuất phát từ đỉnh A lần lượt là $(d_1): x-2y=0; (d_2): x-y+1=0$. Biết điểm $M(1;0)$ nằm trên cạnh AB và diện tích tam giác ABC bằng $\dfrac{180}{7}$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Lời giải tham khảo :

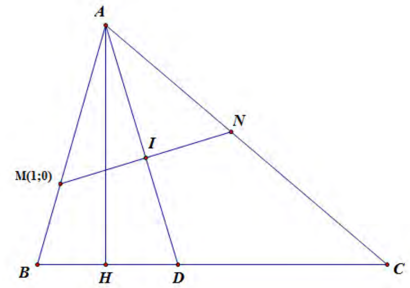
A là giao điểm của (d_1) và $(d_2) \Rightarrow$ tọa độ điểm $A(-2;-1)$

Qua M kẻ đường thẳng $\perp(d_2)$ cắt (d_2) tại I và AC tại N

MN qua M và $\perp(d_2) \Rightarrow (MN): x+y-1=0$

I là giao điểm của MN và $(d_2) \Rightarrow I(0;1)$

I là trung điểm của MN $\Rightarrow N(-1;2)$



Phương trình đường thẳng $(AB): x-3y-1=0$ và $(AC): 3x-y+5=0$

Điểm $B \in AB \Rightarrow B(3a+1;a)$, điểm $C \in AC \Rightarrow C(b;3b+5)$

Ta có $BC \perp AH \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0$

$\overrightarrow{AH}=(2;1);\overrightarrow{BC}=(b-3a-1;3b+5-a)$

$\Rightarrow 2(b-3a-1)+(3b+5-a)=0 \Leftrightarrow 5b-7a+3=0 \qquad (1)$

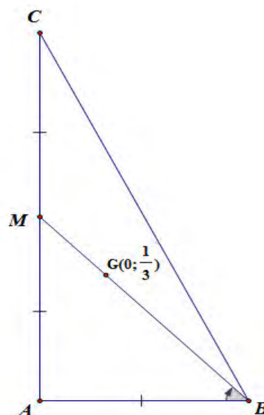
Ta có $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}d(C,AB).AB=\dfrac{|8b+14|}{\sqrt{10}}.\sqrt{(3a+3)^2+(a+1)^2}=\dfrac{180}{7} \qquad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{8}{7} \\ a=-\dfrac{22}{7} \end{array}\right.$ thay ngược lại ta có các điểm A, B, C.

Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 07 : Trong hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác ABC vuông tại A có AC = 2AB, phương trình đường thẳng chứa cạnh AB có phương trình là $(d): 2x-y+7=0$, điểm $G\left(0;\dfrac{1}{3}\right)$ là trọng tâm của tam giác ABC. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết đỉnh B có hoành độ bé hơn -2.

Lời giải tham khảo :



Gọi M là trung điểm của AC $\Rightarrow AM=MC=AB \Rightarrow \Delta BAM$ vuông cân tại A $\Rightarrow \widehat{MBA}=45^o$

Gọi $\overrightarrow{n_1}$ là vtpt của đường thẳng $(d) \Rightarrow \overrightarrow{n_1} = (2;-1)$ và $\overrightarrow{n_2} = (a;b)$ là vtpt của đường thẳng BG $\Rightarrow \cos(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{|2a-b|}{\sqrt{5}.\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow 3a^2 - 8ab - 3b^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 3b \\ a = -\frac{1}{3}b \end{array}\right.$

✓ Với $a = 3b$ chọn $\overrightarrow{n_2} = (3;1) \Rightarrow$ đường thẳng BG qua G có vtpt $\overrightarrow{n_2} \Rightarrow BG : 9x + y - 1 = 0$

B là giao điểm của AB và BG $\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{3} \\ y = \frac{13}{3} \end{cases}$ loại do hoành độ điểm B nhỏ hơn -2

✓ Với $a = -\frac{b}{3}$ chọn $\overrightarrow{n_2} = (1;-3) \Rightarrow$ đường thẳng BG qua G có vtpt $\overrightarrow{n_2} \Rightarrow BG : x - 3y + 1 = 0$

B là giao điểm của AB và BG $\Rightarrow B(-4;-1)$ (thỏa mãn)

M là trung điểm của AC $\Rightarrow M(3a-1;a) \in BG$ ta có $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BM} \Rightarrow M(2;1)$

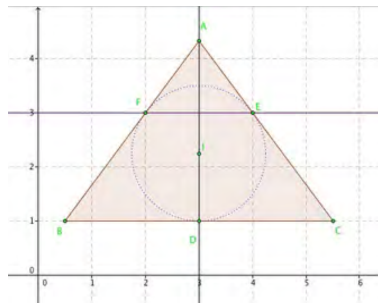
Phương trình đường thẳng AC đi qua điểm M và vuông góc với AB $\Rightarrow AC : x + 2y - 4 = 0$

Tọa độ điểm A là giao điểm AC và AB $\Rightarrow A(-2;3) \Rightarrow C(6;-1)$

Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 08 (k2pi Lần 14 - 2014) : Trong hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác ABC có điểm $B\left(\frac{1}{2};1\right)$. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA và AB tại D, E và F. Biết điểm $D(3;1)$ và phương trình đường thẳng EF có phương trình là $(d) : y - 3 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh A biết đỉnh A có tung độ không âm.

Lời giải tham khảo :



Phương trình đường thẳng BC đi qua điểm B và D $\Rightarrow BC : y - 1 = 0 \Rightarrow BC//EF$

Do đó tam giác ABC cân tại A và D chính là trung điểm của BC.

Phương trình đường thẳng AD đi qua D và vuông góc với BC $\Rightarrow AD : x - 3 = 0$

Điểm $E(a;3) \in EF$ ta có $BE = BD \Rightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + 2^2 = \frac{25}{4} \Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2 \\ a = -1 \end{array}\right.$

✓ $a = 2 \Rightarrow$ phương trình AB đi qua điểm B và E $\Rightarrow AB : 4x - 3y + 1 = 0$

A là giao điểm của AB và AD $\Rightarrow A\left(3; \frac{13}{3}\right)$

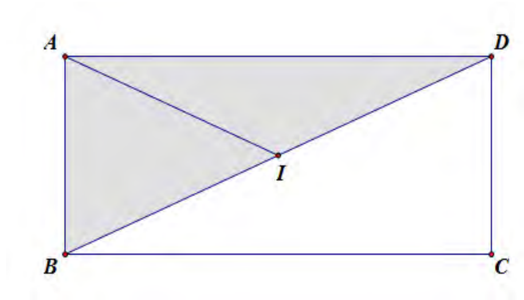
✓ $a = -1 \Rightarrow$ phương trình AB đi qua điểm B và E $\Rightarrow AB : 4x + 3y - 5 = 0$

A là giao điểm của AB và AD $\Rightarrow A\left(3; -\frac{7}{3}\right)$ (loại)

Vậy điểm $A\left(3; \frac{13}{3}\right)$

Đề bài 09 : Trong hệ trục tọa độ Oxy cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = 2AB$ điểm $A(1;5)$, phương trình đường chéo BD là $3x + 4y - 13 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình chữ nhật biết B có hoành độ âm.

Lời giải tham khảo :



Xét tam giác ABD vuông tại A có $BD^2 = AB^2 + AD^2 = 5AB^2 \Rightarrow BD = AB\sqrt{5}$

$$\Rightarrow \cos\widehat{ABD} = \frac{AB}{BD} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Phương trình đường chéo BD có vtpt $\overrightarrow{n_1} = (3;4)$. Gọi $\overrightarrow{n} = (a;b)$ là vtpt của đường thẳng AB

$\Rightarrow \cos\widehat{ABD} = \frac{|3a + 4b|}{5.\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow 4a^2 + 24ab + 11b^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -\frac{11}{2}b \\ a = -\frac{1}{2}b \end{array}\right.$

✓ Với $a = -\frac{11}{2}b$ chọn $\overrightarrow{n} = (11;-2) \Rightarrow$ đường thẳng AB có phương trình $11x - 2y - 1 = 0$

Tọa độ điểm B là giao điểm của AB và BD $\Rightarrow B\left(\frac{3}{5}; \frac{14}{5}\right)$ loại do B có hoành độ âm.

✓ Với $a = -\frac{1}{2}b$ chọn $\overrightarrow{n} = (1;-2) \Rightarrow$ đường thẳng AB có phương trình $x - 2y + 9 = 0$

Tọa độ điểm B là giao điểm của AB và BD $\Rightarrow B(-1;4)$ (thỏa mãn)

Phương trình đường thẳng AD đi qua điểm A và vuông góc với AB $\Rightarrow AD : 2x + y - 7 = 0$

Tọa độ điểm D là giao điểm của AD và BD $\Rightarrow D\,(3;1)$

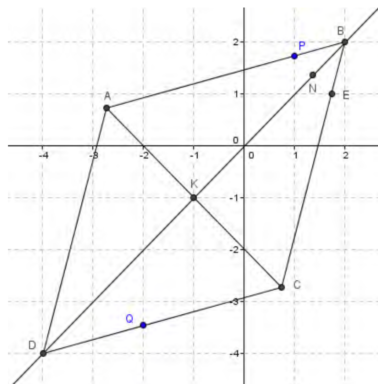
Trung điểm I của BD có tọa độ $I\left(1;\dfrac{5}{2}\right) \Rightarrow C\,(1;0)$

Vậy $B\,(-1;4)\,;D\,(3;1)\,;C\,(1;0)$

Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 10 : Trong hệ trục tọa độ Oxy cho hình thoi $ABCD$ có phương trình đường chéo BD là $(d) : x - y = 0$. Đường thẳng AB đi qua điểm $P\left(1;\sqrt{3}\right)$, đường thẳng CD đi qua điểm $Q\left(-2;-2\sqrt{3}\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi biết độ dài $AB = AC$ và điểm B có hoành độ lớn hơn 1.

Lời giải tham khảo :



Ta có $AB = AC \Rightarrow$ tam giác ABC đều $\Rightarrow \widehat{ABC} = 60^o \Rightarrow \widehat{ABD} = 30^o$

Đường thẳng BD có vtpt $\overrightarrow{n_1} = (1;-1)$. Giả sử $\overrightarrow{n} = (a;b)$ là vtpt của AB

$$\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n}\right) = \frac{|a-b|}{\sqrt{2}.\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow a^2 + 4ab + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = \left(-2 \pm \sqrt{3}\right) b$$

✓ Với $a = \left(-2-\sqrt{3}\right) b$ chọn $\overrightarrow{n} = \left(-2-\sqrt{3};1\right)$ đường thẳng AB đi qua điểm P và có vtpt $\overrightarrow{n} \Rightarrow AB : \left(2+\sqrt{3}\right) x - y - 2 = 0$

Tọa độ điểm B là giao điểm của AB và $BD \Rightarrow B\left(\dfrac{2}{1+\sqrt{3}};\dfrac{2}{1+\sqrt{3}}\right)$ loại do $x_B > 1$

✓ Với $a = \left(-2+\sqrt{3}\right) b$ chọn $\overrightarrow{n} = \left(-2+\sqrt{3};1\right)$ đường thẳng AB đi qua điểm P và có vtpt $\overrightarrow{n} \Rightarrow AB : \left(2-\sqrt{3}\right) x - y - 2 + 2\sqrt{3} = 0$

Tọa độ điểm B là giao điểm của AB và $BD \Rightarrow B\,(2;2)$ thỏa mãn

Ta có $CD \mathbin{//} AB$ và CD đi qua điểm $Q \Rightarrow CD : \left(2-\sqrt{3}\right) x - y + 4 - 4\sqrt{3} = 0$

Tọa độ điểm D là giao điểm của BD và $CD \Rightarrow D\,(-4;-4) \Rightarrow$ tọa độ tâm k của hình thoi là trung điểm của $BD \Rightarrow K\,(-1;-1)$

Phương trình đường chéo AC đi qua điểm K và vuông góc với $BD \Rightarrow AC : x + y + 2 = 0$

Tọa độ điểm A là giao điểm của AB và $AC \Rightarrow A\,(....)$

Tọa độ điểm C là giao điểm của CD và $AC \Rightarrow C\,(....)$

Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 11 : Trong hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $A\,(5;2)$phương trình đường trung trực cạnh BC và trung tuyến xuất phát từ đỉnh C lần lượt là $(d_1) : 2x+y-5 = 0; (d_2) : x+y-6 = 0$.Tìm tọa độ các đỉnh B, C của tam giác ABC.

Lời giải tham khảo :

Giả sử điểm $B\,(a;b)$. Ta có trung điểm của AB là $M\left(\dfrac{a+5}{2};\dfrac{b+2}{2}\right) \in (d_2)$

$\Rightarrow \dfrac{a+5}{2} + \dfrac{b+2}{2} - 6 = 0 \Leftrightarrow a + b - 7 = 0 \Leftrightarrow b = 7 - a \Rightarrow B\,(a;7-a)$

Lấy điểm $C\,(c;6-c) \in (d_2)$

(d_1) là trung trực của $BC \Rightarrow$ trung điểm của BC là $N\left(\dfrac{a+c}{2};\dfrac{13-a-c}{2}\right) \in (d_1)$

$\Rightarrow a + c + \dfrac{13-a-c}{2} - 5 = 0 \Leftrightarrow a + c + 3 = 0 \qquad (1)$

(d_1) là trung trực của $BC \Rightarrow BC \perp (d_1) \Rightarrow \overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{u_{d_1}}$ ta có $\overrightarrow{u_{d_1}} = (1;-2)\,; \overrightarrow{BC} = (c-a; a-1-c)$

$\Rightarrow c - a - 2\,(a-1-c) = 0 \Leftrightarrow 3c - 3a + 2 = 0 \qquad (2)$

Từ (1) và (2) ta có $\begin{cases} c + a = -3 \\ 3c - 3a = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{7}{6} \\ c = -\dfrac{11}{6} \end{cases}$

$\Rightarrow$ tọa độ điểm B và C

Bài toán giải quyết xong.

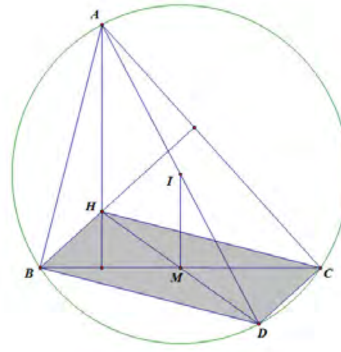
Đề bài 12 : Trong hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $A\,(-1;-3)$, trực tâm $H\,(1;-1)$ và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $I\,(2;-2)$. Xác định tọa độ các đỉnh B, C của tam giác ABC.

Lời giải tham khảo :

Gọi D là điểm đối xứng với A qua $I \Rightarrow AD$ là đường kính đường tròn tâm I và I là trung điểm của $AD \Rightarrow D\,(5;-1)$

AD là đường kính đường tròn tâm I $\Rightarrow CD \perp AC$, H là trực tâm $\Rightarrow BH \perp AC \Rightarrow CD//BH$

Tương tự ta có $CH//BD \Rightarrow BHCD$ là hình bình hành $\Rightarrow$ BC và DH cắt nhau tại trung điểm mỗi đường



$\Rightarrow$ trung điểm M của DH là trung điểm của BC ta có $M(3;-1)$

Phương trình đường thẳng BC đi qua điểm M và vuông góc với AH $\Rightarrow BC : x+y-2=0$

Phương trình đường tròn tâm I có bán kính $IA=\sqrt{10}$

$$\Rightarrow (C) : (x-2)^2+(y+2)^2=10$$

Tọa độ điểm B và C là giao điểm của đường thẳng BC và (C)
Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 13 : Trong hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác ABC có đường cao BH : $x+2y-3=0$, trung tuyến AM : $3x+3y-8=0$. Cạnh BC đi qua điểm $N(3;-2)$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C của tam giác ABC biết đỉnh C thuộc đường thẳng $(d) : x-y+2=0$.

Lời giải tham khảo :

Lấy điểm $B(3-2b;b)\in BH$ và $C(c;c+2)\in(d)$

Gọi M là trung điểm của BC $\Rightarrow M\left(\dfrac{3-2b+c}{2};\dfrac{b+c+2}{2}\right)$. Ta có $M\in AM$

$$\Rightarrow 3.\frac{3-2b+c}{2}+3.\frac{b+c+2}{2}-8=0\Leftrightarrow 3b-6c+1=0 \qquad (1)$$

Cạnh BC đi qua điểm $N(3;-2)\Rightarrow \overrightarrow{BN}$ và $\overrightarrow{NC}$ cùng phương

Ta có $\overrightarrow{BN}=(2b;-2-b)$ và $\overrightarrow{NC}=(c-3;c+4)$

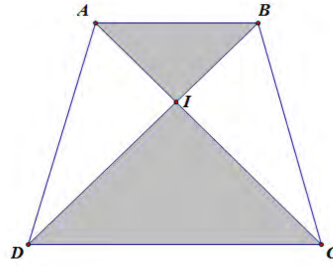
$$\Rightarrow \frac{c-3}{2b}=\frac{c+4}{-2-b}\Leftrightarrow 3bc+5b+2c-6=0 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow b=...;c=...\Rightarrow$ tọa độ điểm B và C.

Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 14 : Trong hệ trục tọa độ Oxy cho hình thang cân $ABCD$ với $CD=2AB$, phương trình hai đường chéo AC và BD lần lượt là $(d_1) : x+y-4=0; (d_2) : x-y-2=0$. Biết rằng tọa độ hai điểm A và B đều dương và diện tích hình thang bằng 36. Tìm tọa độ các đỉnh hình thang.

Lời giải tham khảo :



Ta có $(d_1)\perp(d_2) \Rightarrow$ hình thang cân $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc và bằng nhau.

$\Rightarrow S = \frac{1}{2}.AC.BD = 36 \Rightarrow AC^2 = 72 \Rightarrow AC = BD = 6\sqrt{2}$

Ta có hai tam giác AIB và tam giác CID đồng dạng $\Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{IA}{IC} = \frac{1}{2} \Rightarrow IA = \frac{1}{3}AC = 2\sqrt{2} = IB$

I là giao điểm của hai đường chéo $\Rightarrow I\,(3;1)$

Lấy điểm $A\,(a;4-a) \in (d_1) \Rightarrow IA^2 = (a-3)^2 + (a-3)^2 = 8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=5 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} A\,(1;3) & (tm) \\ A\,(5;-1) & (loai) \end{array}\right.$

Lấy điểm $B\,(b;b-2) \in (d_2) \Rightarrow IB^2 = (b-3)^2 + (b-3)^2 = 8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=5 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} B\,(1;-1) & (loai) \\ B\,(5;3) & (tm) \end{array}\right.$

Lấy điểm $C\,(c;4-c) \in (d_1)$ ta có $IC = 2IA \Rightarrow 2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IC} \Rightarrow C\,(7;-3)$

Lấy điểm $D\,(d;d-2) \in (d_2)$ ta có $ID = 2IB \Rightarrow 2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{ID} \Rightarrow D\,(-1;-3)$

Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 15 : Trong hệ trục tọa độ Oxy cho hình chữ nhật $ABCD$ có điểm C thuộc đường thẳng $(d): x+3y+7=0$ và $A\,(1;5)$. Gọi M là điểm nằm trên tia đối của tia CB sao cho $MC = 2BC$, N là hình chiếu vuông góc của B lên đường thẳng MD. Xác định tọa độ các đỉnh B và C biết rằng $N\left(-\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right)$

Lời giải tham khảo :

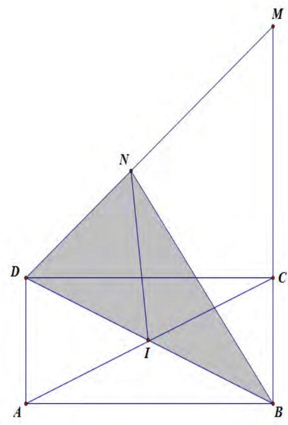
Gọi điểm $C\,(-3c-7;c) \in (d)$. Gọi I là tâm của hình chữ nhật $ABCD$

$\Rightarrow I$ là trung điểm của $AC \Rightarrow I\left(\frac{-3c-6}{2};\frac{c+5}{2}\right)$

Xét tam giác DNB vuông tại N có I là trung điểm của $BD \Rightarrow IN = IB = ID$

I là tâm của hình chữ nhật $\Rightarrow IA = IB = ID \Rightarrow IN = IA$

$$\Rightarrow \left(\frac{-3c-6}{2}-1\right)^2 + \left(\frac{c+5}{2}-5\right)^2 = \left(\frac{-3c-6}{2}+\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{c+5}{2}-\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow c=-3 \Rightarrow C\,(2;-3)$$



Giả sử $B(a;b)$ có $AB\perp BC \Rightarrow \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$ có $\overrightarrow{AB}=(a-1;b-5)\,;\overrightarrow{BC}=(a-2;b+3)$

$\Rightarrow (a-1)(a-2)+(b-5)(b+3)=0 \qquad (1)$

Ta có $CM=2BC \Rightarrow \overrightarrow{CM}=2\overrightarrow{BC} \Rightarrow M(6-2a;-9-2b)$

$MN\perp BN \Rightarrow \overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{BN}$ mà $\overrightarrow{BN}=\left(a+\frac{5}{2};b-\frac{1}{2}\right);\overrightarrow{MN}=\left(\frac{17}{2}-2a;-\frac{19}{2}-2b\right)$

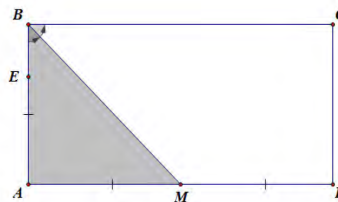
$\Rightarrow \left(a+\frac{5}{2}\right)\left(\frac{17}{2}-2a\right)+\left(b-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{19}{2}-2b\right)=0 \qquad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow a=....;b=.... \Rightarrow B(....)$

Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 16 : Trong hệ trục tọa độ Oxy cho hình chữ nhật $ABCD$, biết phân giác trong góc $\widehat{ABC}$ đi qua trung điểm M của cạnh AD, phương trình đường thẳng BM là $(d): x-y+2=0$, điểm D thuộc đường thẳng $(d_1): x+y-9=0$, điểm $E(-1;2)$ thuộc đường thẳng AB và điểm B có hoành độ âm. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật

Lời giải tham khảo :



Ta có BM là phân giác góc $\widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{ABM}=45^o \Rightarrow \Delta ABM$ vuông cân tại A

Gọi $\overrightarrow{n}=(a;b)$ là vtpt của đường thẳng AB, có $\overrightarrow{n_1}=(1;-1)$ là vtpt của BM

$$\Rightarrow \cos(\overrightarrow{n},\overrightarrow{n_1})=\frac{|a-b|}{\sqrt{2}.\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow ab=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ b=0 \end{array}\right.$$

✓ Với $a = 0$ chọn $\overrightarrow{n} = (0;1) \Rightarrow$ phương trình đường thẳng AB đi qua điểm E và có vtpt $\overrightarrow{n} \Rightarrow AB$: $y - 2 = 0 \Rightarrow$ Tọa độ B là giao điểm của AB và $BM \Rightarrow B(0;2)$ (loại)

✓ Với $b = 0$ chọn $\overrightarrow{n} = (1;0) \Rightarrow$ phương trình đường thẳng AB đi qua điểm E và có vtpt $\overrightarrow{n} \Rightarrow AB$: $x + 1 = 0 \Rightarrow$ Tọa độ B là giao điểm của AB và $BM \Rightarrow B(-1;1)$ (thỏa mãn)

Giả sử điểm $A(-1;a) \in AB$ và $D(d;9-d) \in (d_1)$

Trung điểm M của AD có tọa độ $M\left(\dfrac{d-1}{2};\dfrac{9-d+a}{2}\right) \in (d)$

$\Rightarrow \dfrac{d-1}{2} - \dfrac{9-d+a}{2} + 2 = 0 \Leftrightarrow 2d - a - 6 = 0 \qquad (1)$

Ta có $AD \perp AB \Rightarrow \overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AB}$ mà $\overrightarrow{AB} = (0;1)$ và $\overrightarrow{AD} = (d+1;9-d-a)$

$\Rightarrow 9 - d - a = 0 \Leftrightarrow a + d = 9 \qquad (2)$

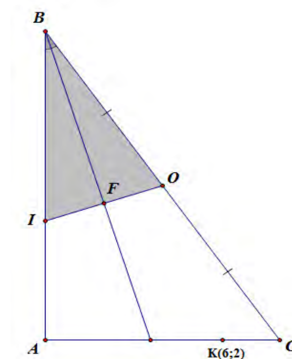
Từ (1) và (2) $\Rightarrow \begin{cases} d = 5 \\ a = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(-1;4) \\ D(5;4) \end{cases}$

Gọi I là tâm hình chữ nhật $\Rightarrow I\left(2;\dfrac{5}{2}\right)$. I là trung điểm của $AC \Rightarrow C(5;1)$

Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 17 : Trong hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác ABC vuông tại A, biết B và C đối xứng nhau qua gốc tọa độ O. Đường phân giác trong góc B có phương trình $(d): x + 2y - 5 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết đường thẳng AC đi qua điểm $K(6;2)$.

Lời giải tham khảo :



Gọi điểm $B(5-2b;b) \in (d)$. B và C đối xứng nhau qua gốc tọa độ $O \Rightarrow C(2b-5;-b)$

Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với (d) cắt (d) và AB lần lượt tại F và I.

Đường thẳng OF đi qua O và vuông góc với $(d) \Rightarrow OF: 2x - y = 0$

Tọa độ F là giao điểm của (d) và $OF \Rightarrow F(1;2)$

F là trung điểm của $OI \Rightarrow I(2;4)$

Tam giác ABC vuông tại $A \Rightarrow AB \perp AC \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ có $\overrightarrow{AB} = (3 - 2b; b - 4)$ và $\overrightarrow{AC} = (2b - 11; -b - 2)$

$\Rightarrow (3 - 2b)(2b - 11) + (b - 4)(-b - 2) = 0 \Leftrightarrow -5b^2 + 30b - 25 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 1 \\ b = 5 \end{array}\right.$ Với $b = 1 \Rightarrow B(3; 1) \Rightarrow C(-3; -1)$

Phương trình đường thẳng AB đi qua B và $I \Rightarrow AB : 3x + y - 10 = 0$

Phương trình đường thẳng AC đi qua C và $K \Rightarrow AC : x - 3y = 0$

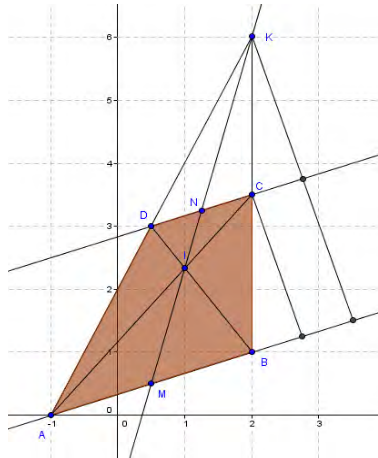
A là giao điểm của AB và $AC \Rightarrow A(3; 1)$ (loại do trùng điểm B)

Trường hợp $b = 5$ xét tương tự

Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 18 : Trong hệ trục tọa độ Oxy cho hình thang ABCD có diện tích bằng $\frac{45}{8}$. Phương trình hai cạnh đáy AB : $x - 3y + 1 = 0$ và CD : $2x - 6y + 17 = 0$. AD và BC cắt nhau tại điểm $K(2; 6)$. Hai đường chéo cắt nhau tại điểm $I\left(1; \frac{7}{3}\right)$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình thang ABCD.

Lời giải tham khảo :



Khoảng cách giữa AB và CD là $d = \frac{15}{\sqrt{40}}$

Ta có diện tích hình thang $S = \frac{1}{2}.(AB + CD).d \Rightarrow AB + CD = \frac{3\sqrt{10}}{2}$ (1)

ABCD là hình thang $\Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{d(I, AB)}{d(I, CD)} = 2$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AB = 2.CD = \sqrt{10}$

Tam giác KAB có CD // AB và AB = 2CD $\Rightarrow$ CD là đường trung bình của tam giác KAB

Nối KI cắt AB và CD tại M và N $\Rightarrow$ M. N lần lượt là trung điểm của AB và CD

Phương trình đường thăng KI đi qua K và I $\Rightarrow KI : 11x - 3y - 4 = 0$

M là giao điểm của KI và AB $\Rightarrow M\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

Ta có AB $= \sqrt{10}$ và M là trung điểm của AB $\Rightarrow$ A và B thuộc đường tròn tâm M bán kính $R = \frac{\sqrt{10}}{2}$

$$\Rightarrow (C) : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$$

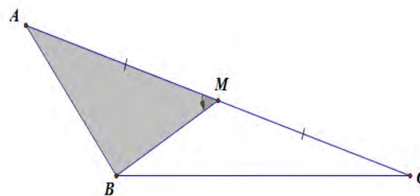
A, B là giao điểm của (C) và đường thẳng AB $\Rightarrow$ A, B có tọa độ là $(2;1);(-1;0)$

Do đó C, D có tọa độ là $\left(2;\frac{7}{2}\right);\left(\frac{1}{2};3\right)$

Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 19 : Trong hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $BC = 2AB$, phương trình đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh B là $(d) : x + y - 2 = 0$. Biết $\widehat{ABC} = 120^o$ và điểm $A(3;1)$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của tam giác.

Lời giải tham khảo :



Đặt $AB = x \Rightarrow BC = 2x$. Áp dụng định lý Cosin vào tam giác ABC ta có

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2.AB.BC.\cos\widehat{ABC} = 7x^2 \Rightarrow AC = x\sqrt{7}$$

Áp dụng công thức tính đường trung tuyến vào tam giác ABC ta được

$$BM^2 = \frac{AB^2 + BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4} = \frac{3x^2}{4}$$

Trong tam giác ABM có $AB = x, BM^2 = \frac{3x^2}{4}; AM = \frac{x\sqrt{7}}{2} \Rightarrow AM^2 = AB^2 + BM^2$

$\Rightarrow \Delta ABM$ vuông tại $B \Rightarrow AB \perp BM$

Phương trình đường thẳng AB đi qua A và vuông góc với $BM \Rightarrow AB : x - y - 2 = 0$

B là giao điểm của AB và $BM \Rightarrow B(2;0)$

Lại có $AB = d(A, BM) = \sqrt{2} = x \Rightarrow BM = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Gọi $M(m; 2 - m) \in BM$

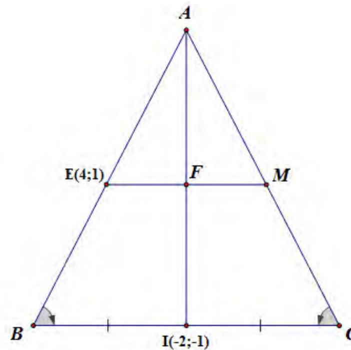
$$\Rightarrow BM^2 = 2(m-2)^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow m = 2 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Thay vào ta được điểm M, lại có M là trung điểm của $AC \Rightarrow$ tọa độ điểm $C\left(2 \pm \sqrt{3}; 4 \pm \sqrt{3}\right)$

Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 20 : Trong hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác ABC cân tại A, phương trình cạnh BC là $(d) : 2x - y + 3 = 0$. Điểm $I(-2; -1)$ là trung điểm cạnh BC, điểm $E(4; 1)$ nằm trên cạnh AB. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác biết diện tích tam giác ABC bằng 90.

Lời giải tham khảo :



Tam giác ABC cân tại $A \Rightarrow AI$ là vừa là đường cao vừa là đường phân giác góc A

Phương trình đường phân giác AI đi qua A và vuông góc với $BC \Rightarrow AI : x + 2y + 4 = 0$

Qua E kẻ đường thẳng vuông góc với AI cắt AI và AC tại F và M.

Phương trình đường thẳng EM đi qua E vuông góc với $AI \Rightarrow EM : 2x - y - 7 = 0$

Tọa độ điểm F là giao điểm của EM và $AI \Rightarrow F(2; -3)$. F là trung điểm của $EM \Rightarrow M(0; 7)$

Lấy điểm $B(b; 2b + 3) \in BC \Rightarrow C(-4 - b; 5 - 2b)$

Tam giác ABC cân tại $A \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ hay $(BE, BC) = (MC, BC)$

$\overrightarrow{BE} = (b - 4; 2b - 2), \overrightarrow{MC} = (4 + b; 2b - 2), \overrightarrow{BC} = (1; 2)$

$$\Rightarrow \frac{|b - 4 + 2b - 4|}{\sqrt{5}.\sqrt{5b^2 - 16b + 20}} = \frac{|5b|}{\sqrt{5}.\sqrt{5b^2 + 20}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 1 \\ b = 4 \end{array}\right.$$

✓ Với $b = 1 \Rightarrow B(1; 5) \Rightarrow C(-5; -7) \Rightarrow BC = 6\sqrt{5}$

$S = \frac{1}{2}.AI.BC = 90 \Rightarrow AI = 6\sqrt{5}$. Lấy điểm $A(-2a - 4; a) \in AI$

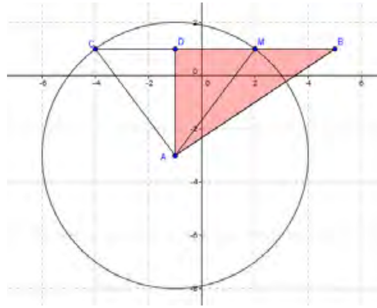
$$\Rightarrow AI^2 = (2a + 2)^2 + (a + 1)^2 = 90 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 5 \\ a = -7 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A(-14; 5) \\ A(10; -7) \end{array}\right.$$

✓ Với $b = 4$ xét tương tự.

Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 21 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có điểm $A(-1;-3), B(5;1)$. Điểm M nằm trên đoạn thẳng BC sao cho $MC = 2MB$. Tìm tọa độ điểm C biết rằng $MA = AC = 5$ và đường thẳng BC có hệ số góc là một số nguyên.

Lời giải tham khảo :



Giả sử điểm $M(a;b)$ ta có $MA = 5 \Rightarrow (a+1)^2 + (b+3)^2 = 25$

$$a^2 + 2a + b^2 + 6b = 15 \qquad (1)$$

Gọi D là trung điểm của CM ta có $MA = AC = 5 \Rightarrow \Delta CAM$ cân tại $A \Rightarrow AD \perp CM$

Theo giả thiết $MC = 2MB \Rightarrow MB = MD \Rightarrow M$ là trung điểm của $BD \Rightarrow D(2a-5;2b-1)$

$\overrightarrow{AD} = (2a-4;2b+2)\,; \overrightarrow{BI} = (2a-10;2a-2)$

$AD \perp BI \Rightarrow \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BI} = 0 \Rightarrow (2a-4)(2a-10) + (2b+2)(2b-2) = 0$

$$\Rightarrow a^2 - 7a + b^2 = -9 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2; b = 1 \\ a = \dfrac{50}{13}; b = -\dfrac{23}{13} \end{array}\right.$

✓ Với $a = \dfrac{50}{13}; b = -\dfrac{23}{13} \Rightarrow M\left(\dfrac{50}{13}; -\dfrac{23}{13}\right)$

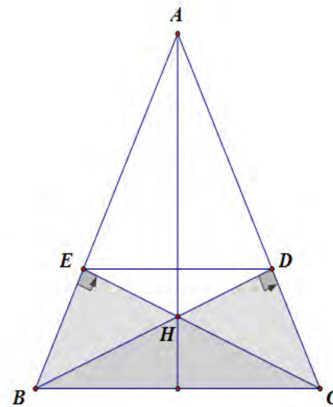
Phương trình đường thẳng BC đi qua B và $M \Rightarrow BC : 12x - 5y - 55 = 0$ (loại do phương trình BC có hệ số góc nguyên)

✓ Với $a = 2; b = 1 \Rightarrow M(2;1)$ phương trình BC đi qua M và $B \Rightarrow BC : y = 1$ (thỏa mãn)

Tọa độ điểm $D(-1;1) \Rightarrow C(-4;1)$

Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 22 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC cân tại A, có trực tâm $H(-3;2)$. Gọi D, E là chân đường cao hạ từ B và C. Điểm A thuộc đường thẳng $(d) : x - 3y - 3 = 0$, điểm $F(-2;3)$ thuộc đường thẳng DE và $HD = 2$. Tìm tọa độ đỉnh A.



Lời giải tham khảo :

Ta có $HD = 2 \Rightarrow (x_D + 3)^2 + (y_D - 2)^2 = 4$

$$\Leftrightarrow x_D^2 + y_D^2 + 6x_D - 4y_D + 9 = 0 \qquad (1)$$

Điểm $A \in (d) \Rightarrow A\,(3a + 3; a)$ ta có $AD \perp DH \Rightarrow \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{HD} = 0$

$(x_D - 3a - 3)\,(x_D + 3) + (y_D - a)\,(y_D - 2) = 0$

$$x_D^2 + y_D^2 - 3ax_D - (a + 2)\,y_D - 7a - 9 = 0 \qquad (2)$$

Tứ (1) và (2) $\Rightarrow (6 + 3a)\,x_D + (a - 2)\,y_D + 7a + 18 = 0$

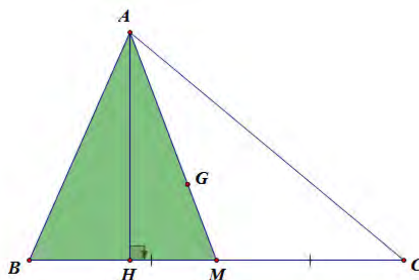
Tương tự ta có $(6 + 3a)\,x_E + (a - 2)\,y_E + 7a + 18 = 0$

Do đó phương trình đường thẳng DE có dạng $(d_1) : (6 + 3a)\,x + (a - 2)\,y + 7a + 18 = 0$

Mà điểm $F \in (d_1) \Rightarrow a = 0 \Rightarrow A\,(3; 0)$

Đề bài 23 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có trọng tâm $G\,(1; 1)$, đường cao từ đỉnh A có phương trình $(d) : 2x - y + 1 = 0$. Các đỉnh B và C thuộc đường thẳng $(d_1) : x + 2y - 1 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác biết tam giác ABC có diện tích bằng 6.

Lời giải tham khảo :



Điểm $A \in (d) \Rightarrow A\,(a; 2a + 1)$

Gọi M là trung điểm của $BC \Rightarrow G \in AM$ và $AG = 2GM \Rightarrow \overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GM}$

$\Rightarrow M\left(\dfrac{3-a}{2}; 1-a\right)$ mặt khác $M \in (d_1)$

$\Rightarrow \dfrac{3-a}{2} + 2(1-a) - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow A(1;3) \Rightarrow M(1;0)$

Gọi H là giao điểm của (d) và $(d_1) \Rightarrow H\left(-\dfrac{1}{5}; \dfrac{3}{5}\right) \Rightarrow AH = \dfrac{6}{\sqrt{5}}$

$S = \dfrac{1}{2}.AH.BC = 6 \Rightarrow BC = 2\sqrt{5} \Rightarrow MB = MC = \sqrt{5}$

Điểm $B \in (d_1) \Rightarrow B(1-2b;b) \Rightarrow MB^2 = 5b^2 = 5 \Leftrightarrow b = \pm 1$

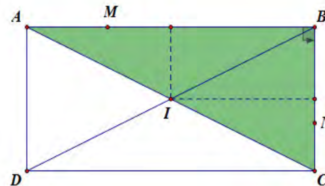
✓ $b = 1 \Rightarrow B(-1;1) \Rightarrow C(3;-1)$

✓ $b = -1 \Rightarrow B(3;-1) \Rightarrow C(-1;1)$

Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 24 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 6. Phương trình đường thẳng chứa đường chéo BD là $(d): 2x + y - 11 = 0$, đường thẳng AB đi qua điểm $M(4;2)$, đường thẳng BC đi qua điểm $N(8;4)$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật biết các điểm B, D đều có hoành độ lớn hơn 4.

Lời giải tham khảo :



Vì $B \in (d) \Rightarrow B(b; 11-2b)$. $AB \perp BC \Rightarrow MB \perp NB \Rightarrow \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{NB} = 0$

$$\Rightarrow (b-4)(b-8) + (9-2b)(7-2b) = 0 \Rightarrow 5b^2 - 44b + 95 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = \dfrac{19}{5} \\ b = 5 \end{array}\right. \Rightarrow B(5;1)$$

Phương trình đường thẳng AB đi qua điểm B và $M \Rightarrow AB: x + y - 6 = 0$

Phương trình đường thẳng BC đi qua điểm B và $N \Rightarrow AC: x - y - 4 = 0$

$A \in AB \Rightarrow A(a; 6-a)$ và $C \in BC \Rightarrow C(c; c-4)$

Gọi I là tâm của hình chữ nhật $\Rightarrow I\left(\dfrac{a+c}{2}; \dfrac{c-a+2}{2}\right) \in BD$

$\Rightarrow a + c + \dfrac{c-a+2}{2} - 11 = 0 \Leftrightarrow 3c + a - 20 = 0$ (1)

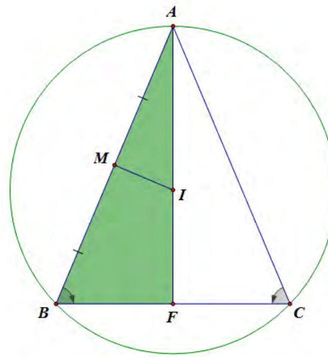
$AB = \sqrt{2}.|a-5|$ và $BC = \sqrt{2}.|c-5| \Rightarrow S = 2|a-5|.|c-5| = 6$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=2;c=6 \\ a=8;c=4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} A(2;4),C(6;2)\Rightarrow I(4;3)\Rightarrow D(3;5) & (loai) \\ A(8;-2),C(4;0)\Rightarrow I(6;-1)\Rightarrow D(7;-3) & (tm) \end{array}\right.$

Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 25 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn $(C): x^2+y^2+2x-4y+1=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết điểm $M(0;1)$ là trung điểm của cạnh AB và điểm A có hoành độ dương.

Lời giải tham khảo :



Tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm $I(-1;2); R=2$. M là trung điểm của $AB \Rightarrow IM \perp AB$

Phương trình đường thẳng AB đi qua M và vuông góc với $IM \Rightarrow AB: x-y+1=0$

Có điểm $A \in AB \Rightarrow A(a;a+1) \Rightarrow IA=2 \Rightarrow (a+1)^2+(a-1)^2=4 \Rightarrow a=\pm 1 \Rightarrow A(1;2) \Rightarrow B(-1;0)$

Phương trình đường thẳng BC đi qua điểm B và vuông góc với $AI \Rightarrow BC: x+1=0$

C là giao điểm của BC và $(C) \Rightarrow C(-1;4)$

Bài toán giải quyết xong.

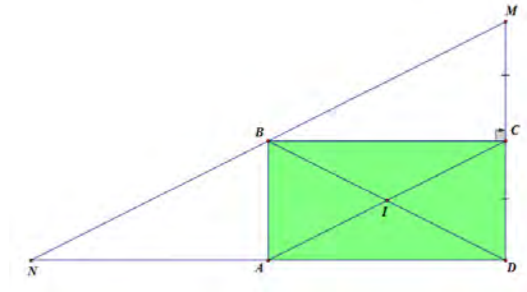
Đề bài 26 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 10, phương trình đường thẳng chứa cạnh AD là $(d): 3x-y=0$. Lấy điểm M đối xứng với điểm D qua điểm C và đường thẳng BM có phương trình $(d_1): 2x+y-10=0$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật biết đỉnh B có hoành độ dương.

Lời giải tham khảo :

Gọi N là giao điểm của BM và $AD \Rightarrow N(2;6)$

Điểm $D \in AD \Rightarrow D(d;3d)$ và $B \in BM \Rightarrow B(b;10-2b)$ với $b>0$

A là trung điểm của $ND \Rightarrow A\left(\dfrac{d+2}{2};\dfrac{3d+6}{2}\right)$



B là trung điểm của $MN \Rightarrow M\left(2b-2;14-4b\right)$ mà C là trung điểm của $MD \Rightarrow C\left(\dfrac{2b-2+d}{2};\dfrac{14-4b+3d}{2}\right)$

$AB \perp AD \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=0$ có $\overrightarrow{AB}=\left(\dfrac{d+2-2b}{2};\dfrac{3d+4b-14}{2}\right)$

$$\Rightarrow \frac{d+2-2b}{2}+3.\frac{3d-14+4b}{2}=0 \Leftrightarrow b+d=4 \qquad (1)$$

Từ (1) có $AD^2=AN^2=\dfrac{10}{4}.\left(d-2\right)^2$ và $AB^2=\dfrac{10}{4}\left(d-2\right)^2$

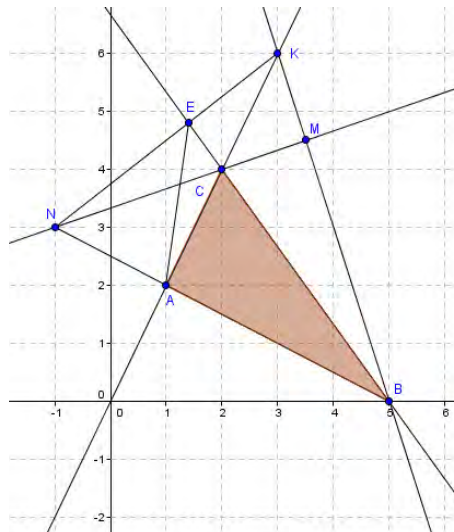
$$\Rightarrow S=\frac{10}{4}\left(d-2\right)^2=10 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} d=0\Rightarrow b=4 & (tm) \\ d=4\Rightarrow b=0 & (loai) \end{array}\right.$$

Do đó $B\left(4;2\right), D\left(0;0\right), C\left(3;-1\right), A\left(1;3\right)$

Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 27 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC vuông tại A. Trên tia đối của tia CA lấy điểm K sao cho $AC=CK$. Kẻ KE vuông góc với BC (E thuộc đường thẳng BC) cắt đường thẳng AB tại $N\left(-1;3\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết $\widehat{AEB}=45^o$, phương trình đường thẳng BK là $(d): 3x+y-15=0$ và hoành độ điểm B lớn hơn 3.

Lời giải tham khảo :



Tam giác NBK có BE và KA là hai đường cao ⇒ C là trực tâm ⇒ NC ⊥ BK.

Tứ giác $BAEK$ nội tiếp ⇒ $\widehat{BEA} = \widehat{AKB} = 45^o \Rightarrow \Delta ABK$ vuông cân tại A ⇒ $\widehat{ABK} = 45^o$

Gọi $\overrightarrow{n} = (a; b)$ là vtpt của đường thẳng AB, có $\overrightarrow{n_1} = (3; 1)$ là vtpt của đường thẳng BK

$$\Rightarrow \cos(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{n_1}) = \frac{|3a+b|}{\sqrt{10}.\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 4a^2 + 6ab - 4b^2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b = 2a \\ a = -2b \end{array}\right.$$

- ✓ Với $a = -2b \Rightarrow$ chọn $\overrightarrow{n} = (-2; 1) \Rightarrow AB : -2x + y - 5 = 0 \Rightarrow B(2; 9)$ (loại)
- ✓ Với $b = 2a \Rightarrow$ chọn $\overrightarrow{n} = (1; 2) \Rightarrow AB : x + 2y - 5 = 0 \Rightarrow B(5; 0)$ (thỏa mãn)

Phương trình đường thẳng NM qua điểm N và vuông góc với BK ⇒ $MN : x - 3y + 10 = 0$

Có ΔABK và ΔKCM vuông cân ⇒ $KM = \frac{1}{\sqrt{2}}.CK = \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{2}.AC = \frac{1}{2\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt{2}}BK = \frac{BK}{4}$

M là giao điểm của MN và $BK \Rightarrow M\left(\frac{7}{2}; \frac{9}{2}\right)$. Có BK = 4MK ⇒ $K(3; 6)$

Phương trình đường thẳng AC đi qua K và vuông góc với AB ⇒ $AC : 2x - y = 0$

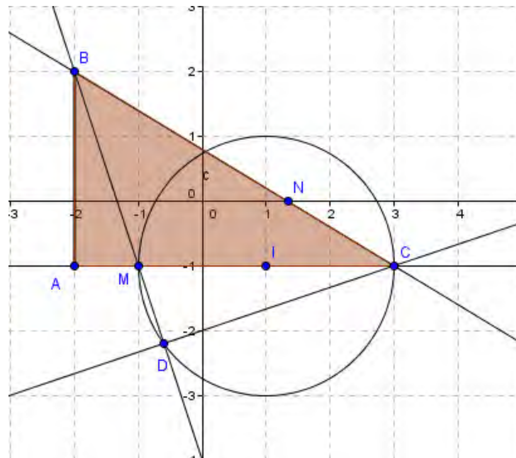
A là giao điểm của AC và AB ⇒ $A(1; 2)$

C là trung điểm của AK ⇒ $C(2; 4)$

Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 28 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi M là điểm trên cạnh AC sao cho AB = 3AM. Đường tròn tâm $I(1; -1)$ đường kính CM cắt BM tại D. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết đường thẳng BC đi qua điểm $N\left(\frac{4}{3}; 0\right)$, phương trình đường thẳng CD : $x - 3y - 6 = 0$ và điểm C có hoành độ dương.

Lời giải tham khảo :



Tam giác ABM vuông tại A có AB = 3AM ⇒ $BM = \sqrt{10}AM \Rightarrow \cos\widehat{ABM} = \frac{3}{\sqrt{10}}$

Tứ giác BADC nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{DCA} \Rightarrow \cos\widehat{DCA} = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$. Gọi $\overrightarrow{n} = (a;b)$ là vtpt của đường thẳng AC

$$\Rightarrow \cos\widehat{DCA} = \frac{|a-3b|}{\sqrt{10}.\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow 8a^2 + 6ab = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = -\dfrac{3b}{4} \end{array}\right.$$

✓ Với $a = -\dfrac{3b}{4} \Rightarrow$ chọn $\overrightarrow{n} = (3;-4)$.Phương trình đường thẳng AC đi qua điểm I và có vtpt $\overrightarrow{n}$

$\Rightarrow AC : 3x - 4y - 7 = 0$ C là giao điểm của AC và CD $\Rightarrow C\left(-\dfrac{3}{5}; -\dfrac{11}{5}\right)$ (loại)

✓ Với $a = 0 \Rightarrow$ chọn $\overrightarrow{n} = (0;1)$. Phương trình AC đi qua điểm I và có vtpt $\overrightarrow{n}$

$\Rightarrow AC : y + 1 = 0 \Rightarrow$ tọa độ điểm C là $C(3;-1)$ (thỏa mãn)

I là trung điểm của CM $\Rightarrow M(-1;-1) \Rightarrow$ phương trình đường tròn tâm I là $(C) : (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$

D là giao điểm của CD và $(C) \Rightarrow D\left(-\dfrac{3}{5}; -\dfrac{11}{5}\right)$. Phương trình đường thẳng $BM : 3x + y + 4 = 0$

Phương trình đường thẳng BC : $3x + 5y - 4 = 0$. B là giao điểm của BM và BC $\Rightarrow B(-2;2)$

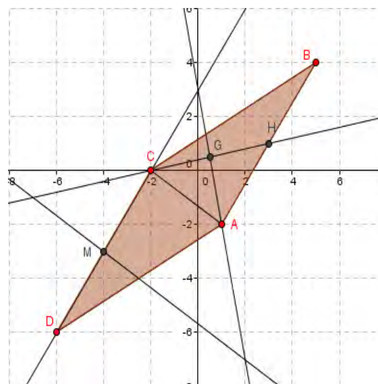
Phương trình đường thẳng AB đi qua B và vuông góc với AC $\Rightarrow$ AB : $x + 2 = 0$

A là giao điểm của AB và AC $\Rightarrow A(-2;-1)$.

Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 29 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình bình hành ABCD có $D(-6;-6)$, đường trung trực (d_1) của đoạn thẳng CD có phương trình là $(d_1) : 2x + 3y + 17 = 0$ và đường phân giác (d_2) của góc $\widehat{BAC}$ có phương trình $(d_2) : 5x + y - 3 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình bình hành ABCD.

Lời giải tham khảo :



Đường thẳng CD đi qua điểm D và vuông góc với $(d_1) \Rightarrow CD : 3x - 2y + 6 = 0$

Gọi M là giao điểm của CD và $(d_1) \Rightarrow M(-4;-3)$. M là trung điểm của CD $\Rightarrow C(-2;0)$

Qua C kẻ đường thẳng vuông góc với (d_2) cắt (d_2) tại G và cắt AB tại H $\Rightarrow CH: x - 5y + 2 = 0$

G là giao điểm của CH và $(d_2) \Rightarrow G\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. G là trung điểm của CD $\Rightarrow H(3; 1)$

Phương trình đường thẳng AB đi qua H và song song với CD $\Rightarrow AB: 3x - 2y - 7 = 0$

A là giao điểm của AB và $(d_2) \Rightarrow A(1; -2)$.

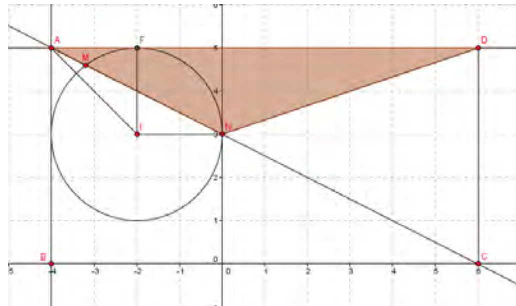
Phương trình đường thẳng BC đi qua điểm C và song song với AD $\Rightarrow BC: 4x - 7y + 8 = 0$

B là giao điểm của AB và BC $\Rightarrow B(5; 4)$

Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 30 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD có các cạnh AB và AD tiếp xúc với đường tròn $(C): (x+2)^2 + (y-3)^2 = 4$. Đường chéo AC cắt (C) tại điểm $M\left(-\frac{16}{5}; \frac{23}{5}\right)$ và điểm N thuộc trục Oy. Xác định tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD biết điểm A có hoành độ âm và điểm D có hoành độ dương, diện tích tam giác AND bằng 10

Lời giải tham khảo :



Đường tròn (C) cắt trục Oy tại điểm $N(0; 3) \Rightarrow MN = \frac{8\sqrt{5}}{5}$ và phương trình MN : $x + 2y - 6 = 0$

Giả sử đường tròn (C) tiếp xúc với AB, AD tại điểm G và F $\Rightarrow$ AGIF là hình vuông $\Rightarrow$ AF = IF = 2.

AMN là cát tuyến của (C) và AF là tiếp tuyến của $(C) \Rightarrow AM.AN = AF^2 = 4$

Vì $A \in MN \Rightarrow A(6 - 2a; a)$ và $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN} = 4$ (A nằm ngoài M và N)

$$\Rightarrow \left(-\frac{16}{5} - 6 + 2a\right)(2a - 6) + \left(\frac{23}{5} - a\right)(3 - a) = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 5 \\ a = \frac{13}{5} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A\left(\frac{4}{5}; \frac{13}{5}\right) \\ A(-4; 5) \end{array}\right. \Rightarrow A(-4; 5)$$

Giả sử điểm $D(b; c)$. Gọi d là khoảng cách từ D đến AN ta có

$$S_{AND} = \frac{1}{2}.d.AN = 10 \Rightarrow d = 2\sqrt{5} \Rightarrow \frac{|b + 2c - 6|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} \Rightarrow |b + 2c - 6| = 10 \qquad (1)$$

Ta có góc giữa AD và AI bằng 45^o. $\overrightarrow{AD} = (b + 4; c - 5)$, $\overrightarrow{AI} = (1; -1)$

$\cos\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AI}\right)=\dfrac{|b+4-c+5|}{\sqrt{2}.\sqrt{(b+4)^2+(c-5)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}c=5\\b=-4\end{array}\right.$

Với $c=5$ thay vào (1) $\Rightarrow\left[\begin{array}{l}b=6\\b=-14\end{array}\right.$ D có hoành độ dương $\Rightarrow D(6;5)$

Phương trình AD đi qua điểm A và D $\Rightarrow AD: y=5$. Phương trình CD đi qua D và vuông góc với AD $\Rightarrow CD: x=6$

C là giao điểm của AC và CD $\Rightarrow C(6;0)$. Gọi I là tâm hình chữ nhật $\Rightarrow I\left(1;\dfrac{5}{2}\right)$

I là trung điểm của BD $\Rightarrow B(-4;0)$

Đề bài 31 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có điểm $M(2;1)$ là trung điểm của AC. Điểm $H(0;-3)$ là chân đường cao hạ từ A, điểm $E(23;-2)$ thuộc trung tuyến kẻ từ C. Tìm tọa độ đỉnh B biết đỉnh A thuộc đường thẳng $(d): 2x+3y-5=0$ và điểm C có hoành độ dương.

Lời giải tham khảo :

Vì $A\in(d)\Rightarrow A(3a+1;1-2a)$. M là trung điểm của AC $\Rightarrow C(3-3a;1+2a)$

H là chân đường cao hạ từ A $\Rightarrow$ AH $\perp$ CH $\Rightarrow\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{CH}$

$\Rightarrow(3a+1)(3-3a)+(4-2a)(4+2a)=0\Rightarrow-13a^2+6a+19=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=-1\\a=\dfrac{19}{13}\end{array}\right.$

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}C(6;-1)\\C\left(-\dfrac{18}{13};\dfrac{51}{13}\right)\end{array}\right.\Rightarrow C(6;-1)\Rightarrow A(-2;3)$

Phương trình đường trung tuyến kẻ từ C đi qua C và E $\Rightarrow CE: x+17y+11=0$

Phương trình đường thẳng BC đi qua C và H $\Rightarrow BC: x-3y-9=0$

Lấy điểm $B\in BC\Rightarrow B(3b+9;b)$

Trung điểm của AB là điểm $N\left(\dfrac{3b+7}{2};\dfrac{b+3}{2}\right)$

$N\in CE\Rightarrow\dfrac{3b+7}{2}+11.\dfrac{3+b}{2}+11=0\Rightarrow b=-4\Rightarrow B(-3;-4)$

Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 32 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình thoi $ABCD$ có phương trình đường chéo AC là $(d) : x + 7y - 31 = 0$. Các đỉnh B, D lần lượt thuộc các đường thẳng $(d_1) : x + y - 8 = 0$; $(d_2) : x - 2y + 3 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi biết hình thoi có diện tích bằng 75 và đỉnh A có hoành độ âm.

Lời giải tham khảo :

$B \in (d_1) \Rightarrow B(b; 8 - b)$ và $D \in (d_2) \Rightarrow D(2d - 3; d)$

ABCD là hình thoi ⇒ trung điểm của BD ∈ AC. Gọi I là trung điểm của AC ⇒ $I\left(\dfrac{b + 2d - 3}{2}; \dfrac{8 - b + d}{2}\right)$

$I \in AC \Rightarrow \dfrac{b + 2d - 3}{2} + 7.\dfrac{8 - b + d}{2} - 31 = 0 \Rightarrow 2b - 3d + 3 = 0$ (1)

Mặt khác BD ⊥ AC ⇒ $7(2d - 3 - b) - (d - 8 + b) = 0 \Rightarrow -8b + 13d - 13 = 0$ (2)

Từ (1) và (2) ⇒ $\begin{cases} b = 0 \\ d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(0; 8) \\ D(-1; 1) \end{cases} \Rightarrow BD = 5\sqrt{2}$

$S = \dfrac{1}{2}.AC.BD = 75 \Rightarrow AC = 15\sqrt{2}$. Tam của hình thoi là $I\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{9}{2}\right)$

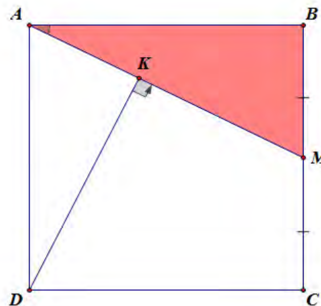
$A \in AC \Rightarrow A(31 - 7a; a)$. Có $IA = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{15\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow IA^2 = ... \Rightarrow$ tọa độ điểm A ⇒ tọa độ điểm C

Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 33 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình vuông ABCD có $A(1; 1)$ và AB = 4. Gọi M là trung điểm của BC, $K\left(\dfrac{9}{5}; -\dfrac{3}{5}\right)$ là hình chiếu của D lên AM. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình vuông biết đỉnh B có hoành độ nhỏ hơn 2.

Lời giải tham khảo :



Phương trình đường thẳng AM đi qua A và K ⇒ $AM : 2x + y - 3 = 0$

Ta có $AK = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ và $AM = 2\sqrt{5} \Rightarrow \frac{AK}{AM} = \frac{2}{5}$

Lấy điểm $M(m; 3-2m)$. Ta có $\frac{AK}{AM} = \frac{2}{5} \Rightarrow \overrightarrow{AK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AM} \Rightarrow M(3; -3)$

Giả sử điểm $B(a; b)$ với $a > 2$. ABCD là hình vuông nên AB ⊥ BM

$$\Rightarrow (a-1)(a-3) + (b-1)(b+3) = 0 \Leftrightarrow a^2 - 4a + b^2 + 2b = 0 \quad (1)$$

$AB = 4 \Rightarrow (a-1)^2 + (b-1)^2 = 16 \Leftrightarrow a^2 - 2a + b^2 - 2b = 14 \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow B(1; -3)$. M là trung điểm của BC $\Rightarrow C(5; -3)$

Phương trình đường thẳng AD đi qua A và vuông góc với AB $\Rightarrow AD : y = 1$

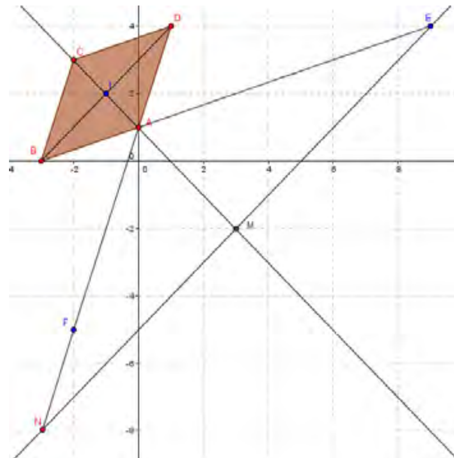
Phương trình đường thẳng CD đi qua C và vuông góc với BC $\Rightarrow CD : x = 5$

D là giao điểm của CD và AD $\Rightarrow D(5; 1)$

Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 34 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình thoi ABCD có đường chéo AC nằm trên đường thẳng $(d) : x + y - 1 = 0$. Điểm $E(9; 4)$ nằm trên đường thẳng chứa cạnh AB, điểm $F(-2; -5)$ nằm trên đường thẳng chứa cạnh AD, $AC = 2\sqrt{2}$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình thoi biết điểm C có hoành độ âm.

Lời giải tham khảo :



Qua E kẻ đường thẳng vuông góc với đường chéo AC cắt AC tại M và cắt AD tại N

Phương trình đường thẳng EN đi qua E và vuông góc với AC $\Rightarrow EN : x - y - 5 = 0$

AC cắt EN tại điểm M $\Rightarrow M(3; -2)$. M là trung điểm của EN $\Rightarrow N(-3; -8)$

Phương trình đường thẳng AD đi qua F và N $\Rightarrow AD : 3x - y + 1 = 0$

A là giao điểm của AC và AD $\Rightarrow A(0; 1)$

Lấy điểm $C(c; 1-c) \in AC \Rightarrow AC^2 = c^2 + c^2 = 8 \Rightarrow c = \pm 2 \Rightarrow C(-2; 3)$

Gọi I là tâm của hình thoi ⇒ I là trung điểm của AC ⇒ $I(-1;2)$

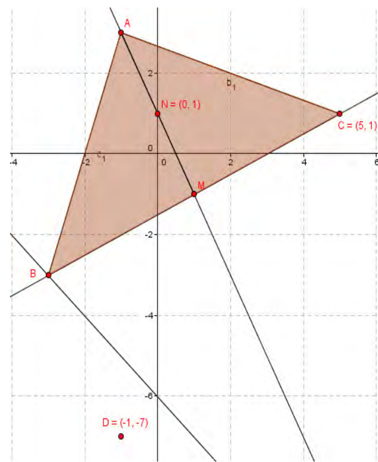
Phương trình đường chéo BD đi qua điểm I và vuông góc với AC ⇒ $BD: x - y + 3 = 0$

D là giao điểm của AD và BD ⇒ $D(1;4)$. I là trung điểm của BD ⇒ $B(-3;0)$

Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 35 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có điểm $C(5;1)$, trung tuyến AM, điểm B thuộc đường thẳng $(d): x + y + 6 = 0$. Điểm $N(0;1)$ là trung điểm của AM, điểm $D(-1;-7)$ không nằm trên đường thẳng AM và khác phía so với đường thẳng BC đồng thời khoảng cách từ A và D tới đường thẳng BC bằng nhau. Xác định tọa độ điểm A và B.

Lời giải tham khảo :



Giả sử $\overrightarrow{n} = (a;b)$ là vtpt của đường thẳng BC ⇒ $BC: ax + by - 5a - b = 0$

Ta có $d(A,BC) = d(D,BC) = 2d(N,BC) \Rightarrow \dfrac{|-6a-8b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{2|5a|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$\Rightarrow 16a^2 - 24ab - 16b^2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = -\dfrac{1}{2}b \\ a = 2b \end{array}\right.$$

- ✓ Với $a = 2b \Rightarrow BC: 2x + y - 11 = 0$ (loại do N và D cùng phía với BC)
- ✓ Với $a = -\dfrac{1}{2}b \Rightarrow BC: x - 2y - 3 = 0$ (thỏa mãn)

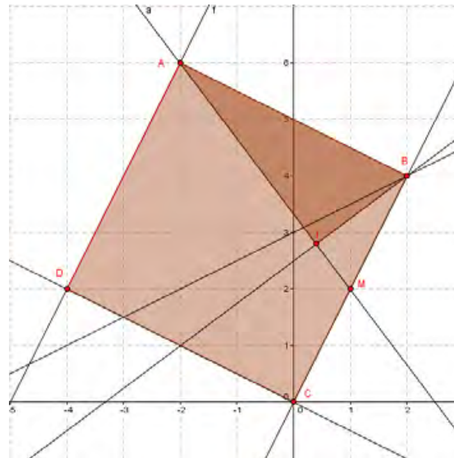
B là giao điểm của đường thẳng BC và $(d) \Rightarrow B(-3;-3)$

M là trung điểm của BC ⇒ $M(1;-1)$. N là trung điểm của AM ⇒ $A(1;3)$

Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 36 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình vuông ABCD có $A(-2;6)$, đỉnh B nằm trên đường thẳng $(d): x - 2y + 6 = 0$. Trên hai cạnh BC và CD lấy hai điểm M và N sao cho BM = CN. Xác định tọa độ các đỉnh của hình vuông biết AM và BN cắt nhau tại điểm $I\left(\frac{2}{5}; \frac{14}{5}\right)$.

Lời giải tham khảo :



Ta có $\Delta ABM = \Delta BCN \Rightarrow \widehat{BMA} = \widehat{BNC} \Rightarrow \widehat{BMA} + \widehat{CBN} = 90^o \Rightarrow$ BN $\perp$ AM

Phương trình đường thẳng AI đi qua A và I $\Rightarrow AI: 4x + 3y - 10 = 0$

Phương trình đường thẳng BN đi qua I và vuông góc với AI $\Rightarrow BI: 3x - 4y + 10 = 0$

B là giao điểm của đường thẳng (d) và BI $\Rightarrow B(2;4)$

Phương trình đường thẳng BC đi qua B và vuông góc với AB $\Rightarrow BC: 2x - y = 0$

M là giao điểm của BC và AI $\Rightarrow M(1;2)$

Ta có $AB = 2\sqrt{5}, BM = \sqrt{5} \Rightarrow BM = \frac{1}{2}BC \Rightarrow$ M là trung điểm của BC

$\Rightarrow$ tọa độ điểm $C(0;0)$

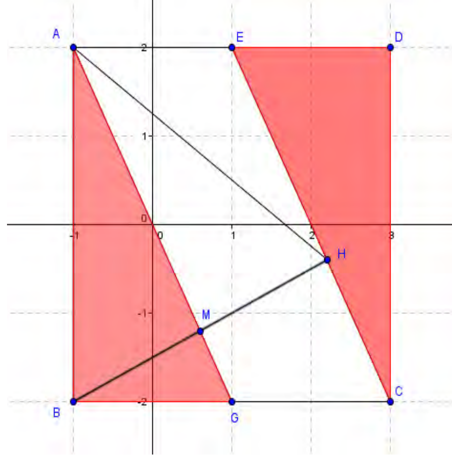
Giả sử H là tâm hình vuông $\Rightarrow$ H là trung điểm của AC $\Rightarrow H(-1;3)$

H là trung điểm của BD $\Rightarrow D(-4;2)$

Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 37 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình vuông ABCD. Gọi E là trung điểm của cạnh AD, điểm $H\left(\frac{11}{5}; -\frac{2}{5}\right)$ là hình chiếu của B lên CE và $M\left(\frac{3}{5}; -\frac{6}{5}\right)$ là trung điểm của BH. Xác định tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD biết đỉnh A có hoành độ âm.

Lời giải tham khảo :



Gọi G là trung điểm của BC ⇒ GM là đường trung bình của tam giác BCH ⇒ GM // CE

ABCD là hình vuông có E, G lần lượt là trung điểm của AD và BC ⇒ AG // CE

Qua G có hai đường thẳng cùng song song với CE do đó A, G, M thẳng hàng hay AM ⊥ BH

⇒ phương trình đường thẳng AM : $2x + y = 0$, phương trình đường thẳng CE : $2x + y - 4 = 0$

M là trung điểm của BH ⇒ $B\left(-1;-2\right)$

Hai tam giác ABM và CED đồng dạng ⇒ $\dfrac{BM}{AM} = \dfrac{ED}{CD} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow AM = 2BM$

Có $BM = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$. Tam giác ABM vuông tại M có AM = 2BM = $\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$ ⇒ AB = 4

Lấy điểm $A\left(a;-2a\right) \in AM \Rightarrow AB = \left(a+1\right)^2 + \left(2-2a\right)^2 = 16 \Leftrightarrow 5a^2 - 6a - 11 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -1 \\ a = \dfrac{11}{5} \end{array}\right.$

⇒ $A\left(-1;2\right)$ ⇒ phương trình đường thẳng AD đi qua A và vuông góc với AB ⇒ $AD : y = 2$

E là giao điểm của AD và CE ⇒ $E\left(1;2\right)$, E là trung điểm của AD ⇒ $D\left(3;2\right)$

Phương trình đường thẳng BC đi qua B và song song với AD ⇒ $BC : y = -2$

C là giao điểm của CE và BC ⇒ $C\left(3;-2\right)$

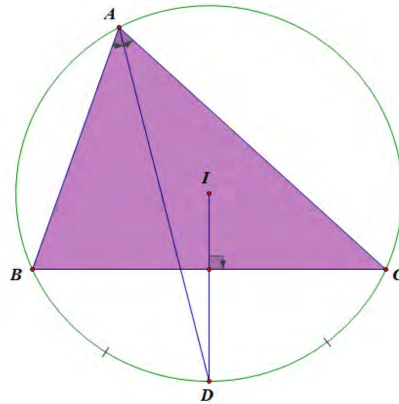
Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 38 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có đỉnh $A\left(-3;4\right)$, đường phân giác trong góc A có phương trình $(d) : x + y - 1 = 0$ và tâm đường tròn ngoại tiếp là $I\left(1;7\right)$. Viết phương trình cạnh BC, biết diện tích tam giác ABC gấp bốn lần diện tích tam giác IBC.

Lời giải tham khảo :

Ta có IA = 5 ⇒ phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có dạng $(C) : (x-1)^2 + (y-7)^2 = 25$

Phương trình phân giác góc A cắt đường tròn tại điểm thứ 2 là D ⇒ $D\left(-2;3\right)$



AD là phân giác trong góc A nên D là trung điểm của cung nhỏ BC $\Rightarrow$ ID $\perp$ BC

Phương trình đường thẳng BC nhận $\overrightarrow{AD}$ làm vtpt $\Rightarrow$ phương trình BC có dạng : $3x + 4y + \alpha = 0$

Ta có diện tích tam giác ABC gấp 4 lần diện tích tam giác IBC nên $d(A, BC) = 4d(I, BC)$

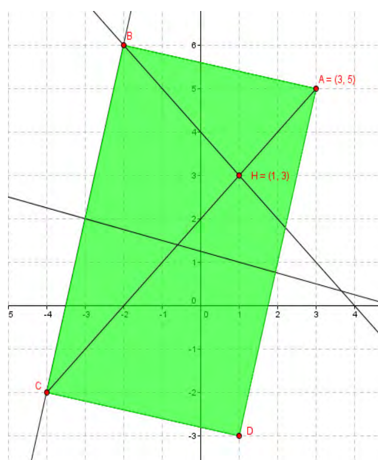
$$\Leftrightarrow \frac{|7+\alpha|}{5} = 4.\frac{31+\alpha}{5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = -\dfrac{114}{3} \\ \alpha = -\dfrac{131}{5} \end{array}\right.$$

Phương trình đường thẳng BC là $\left[\begin{array}{l} 9x + 12y - 114 = 0 \\ 15x + 20y - 131 = 0 \end{array}\right.$

Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 39 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình bình hành ABCD có điểm $A(3; 5)$. Điểm $H(1; 3)$ là hình chiếu của B lên AC và đường trung trực của BC có phương trình $(d) : x + 4y - 5 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình bình hành.

Lời giải tham khảo :



Phương trình đường thẳng AC đi qua A và H $\Rightarrow AC : x - y + 2 = 0$

Phương trình đường thẳng BH đi qua H và vuông góc với AC $\Rightarrow BH : x + y - 4 = 0$

Lấy điểm $B(b; 4 - b) \in BH$ và $C(c; c + 2) \in AC$

Đường thẳng (d) là trung trực của BC $\Rightarrow$ BC $\perp (d)$

$\Rightarrow 4(c - b) - (c + b - 2) = 0 \Leftrightarrow 3c - 5b + 2 = 0$ (1)

Trung điểm của BC là điểm $M\left(\dfrac{b+c}{2}; \dfrac{6-b+c}{2}\right) \in AC$

$\Rightarrow \dfrac{b+c}{2} + 4.\dfrac{6-b+c}{2} - 5 = 0 \Leftrightarrow 5c - 3b + 4 = 0$ (2)

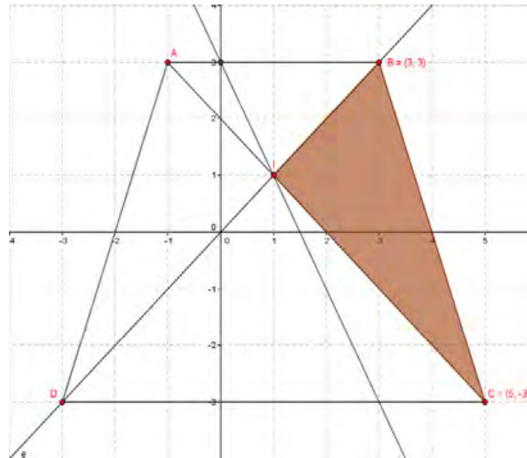
Từ (1) và (2) $\Rightarrow \begin{cases} b = -2 \\ c = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(-2; 6) \\ C(-4; -2) \end{cases}$

Gọi I là tâm của hình bình hành $\Rightarrow D(1; -3)$

Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 40 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình thang ABCD có hai đáy là AB và CD biết $B(3; 3), C(5; -3)$. Giao điểm I của hai đường cheo nằm trên đường thẳng $(d) : 2x + y - 3 = 0$. Diện tích tam giác ABC bằng 12. Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của hình thang biết CI = 2BI, điểm I có hoành độ dương và điểm A có hoành độ âm.

Lời giải tham khảo :



Lấy điểm $I(m; 3 - 2m) \in (d)$. Ta có IC = 2IB

$\Rightarrow (m - 5)^2 + (6 - 2m)^2 = 4(m - 3)^2 + 4(2m)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -\dfrac{5}{3} \end{array}\right. \Rightarrow I(1; 1)$

Phương trình đường thẳng AC đi qua I và C $\Rightarrow AC : x + y - 2 = 0$.

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}.d(B, AC).AC = 12 \Rightarrow AC = 6\sqrt{2}$

Lấy điểm $A(a;2-a) \in AC$. Ta có $AC = 6\sqrt{2}$

$\Rightarrow (a-5)^2 + (5-a)^2 = 72 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 11 \\ a = -1 \end{array}\right. \Rightarrow A(-1;3)$

Phương trình đường thẳng CD đi qua C và song song với AB $\Rightarrow CD : y = -3$

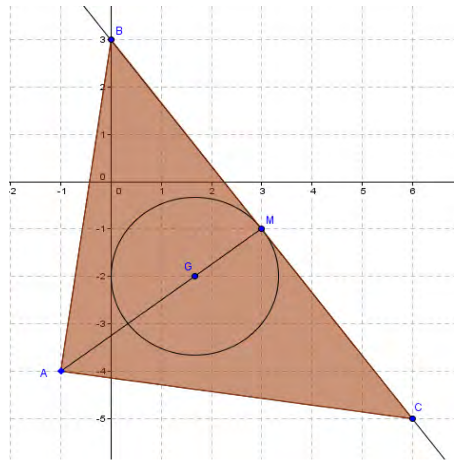
Phương trình đường thẳng BD đi qua B và I $\Rightarrow BD : x - y = 0$

D là giao điểm của BD và CD $\Rightarrow D(-3;-3)$

Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 41 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC vuông tại A, có trọng tâm $G\left(\frac{5}{3};-2\right)$, bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 5. B và C thuộc đường thẳng $(d) : 4x+3y-9=0$. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Lời giải tham khảo :



Gọi M là trung điểm của BC, ta có $GM = \frac{1}{3}AM = \frac{1}{3}R = \frac{5}{3}$

$\Rightarrow$ M thuộc đường tròn tâm G bán kính $\frac{5}{3}$ hay $M \in (C) : \left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + (y+2)^2 = \frac{25}{9}$

Tọa độ M là giao điểm của (C) và $(d) \Rightarrow M(3;-1)$

Phương trình đường thẳng AM đi qua G và M $\Rightarrow AM : 3x - 4y - 13 = 0$

G là trọng tâm tam giác ABC $\Rightarrow AM = 3GM \Rightarrow A(-1;-4)$

Phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có tâm M và R = 5

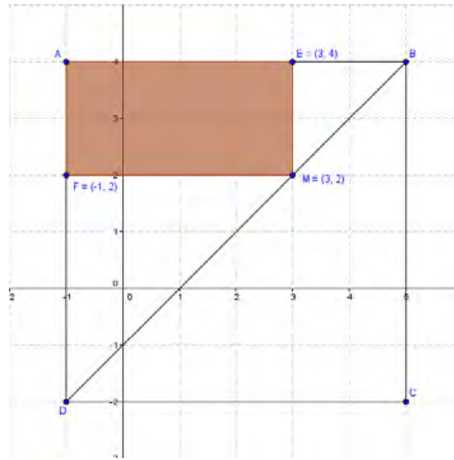
$$\Rightarrow (C_1) : (x-3)^2 + (y+1)^2 = 25$$

B và C là giao điểm của (d) và $(C_1) \Rightarrow B(0;3), C(6;-5)$ và ngược lại

Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 42 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình vuông ABCD có điểm $M(3;2)$ nằm trên đường chéo BD. Từ M kẻ các đường thẳng ME và MF lần lượt vuông góc với AB tại $E(3;4)$ và AD tại $F(-1;2)$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD.

Lời giải tham khảo :



Phương trình đường thẳng AB đi qua E và vuông góc với ME $\Rightarrow AB: y = 4$

Phương trình đường thẳng AD đi qua F và vuông góc với MF $\Rightarrow AD: x = -1$

A là giao điểm của AB và AD $\Rightarrow A(-1;4)$

ABCD là hình vuông $\Rightarrow$ ME = BE = 2 và AE = MF = 4

Lấy điểm $B(b;4) \in AB$. Có AE = 2EB $\Rightarrow \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{EB} \Rightarrow B(5;4)$

Phương trình đường thẳng BD đi qua M và B $\Rightarrow BD: x - y - 1 = 0$

D là giao điểm của AD và BD $\Rightarrow D(-1;-2)$

Gọi I là tâm của hình vuông $\Rightarrow$ I là trung điểm của BD $\Rightarrow I(2;1) \Rightarrow C(5;-2)$

Bài toán giải quyết xong.

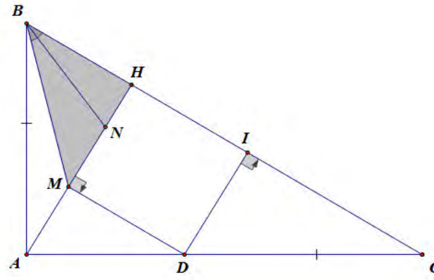
Đề bài 43 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC vuông tại A (AB < AC) có tọa độ đỉnh $B(2;1)$. Đường cao AH có phương trình $x + 2y - 10 = 0$. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho AB = CD. Kẻ DM vuông góc với AH tại M. Đường phân giác góc $\widehat{CBM}$ cắt AH tại N. Tìm tọa độ điểm N.

Lời giải tham khảo :

Từ D hạ DI vuông góc với BC (I thuộc BC)

Ta có $\widehat{BAH} = \widehat{DCI} \Rightarrow \Delta ABH = \Delta CDI \Rightarrow$ DI = BH

Tứ giác DMHI là hình chữ nhật $\Rightarrow$ DI = MH do đó BH = MH hay tam giác BHM vuông cân



Phương trình đường thẳng BC đi qua B và vuông góc với AH $\Rightarrow BC: 2x - y - 3 = 0$

Gọi α là góc tạo bởi BN và BH ta có $\cos 45^o = 2\cos^2\alpha - 1 \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+2}{4}}$

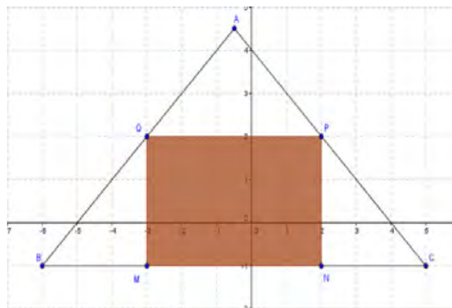
Phương trình đường thẳng BN đi qua B và tạo với BC một góc α

Đến đây bài toán đơn giản là viết phương trình đường thẳng tạo với đường thẳng cho trước 1 góc cho trước (cái này dành cho bạn đọc)

Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 44 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC vuông tại A ngoại tiếp hình chữ nhật MNPQ. Biết các điểm $M(-3;-1)$ và $N(2;-1)$ thuộc cạnh BC, Q thuộc cạnh AB, P thuộc cạnh AC, đường thẳng AB có phương trình $x - y + 5 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Lời giải tham khảo :



Phương trình đường thẳng BC đi qua M và N $\Rightarrow BC: y = -1$

MNPQ là hình chữ nhật $\Rightarrow$ MN $\perp$ MQ $\Rightarrow$ phương trình MQ qua M và vuông góc BC $\Rightarrow MQ: x = -3$

Q là giao điểm của MQ và AB $\Rightarrow Q(-3;2)$

Phương trình PQ qua P và vuông góc với MQ $\Rightarrow PQ: y = 2$

Phương trình NP qua N và vuông góc với MN $\Rightarrow NP: x = 2$

P là giao điểm của PQ và NP $\Rightarrow P(2;2)$

Phương trình đường thẳng AC đi qua P và vuông góc với AB $\Rightarrow AC: x + y - 4 = 0$

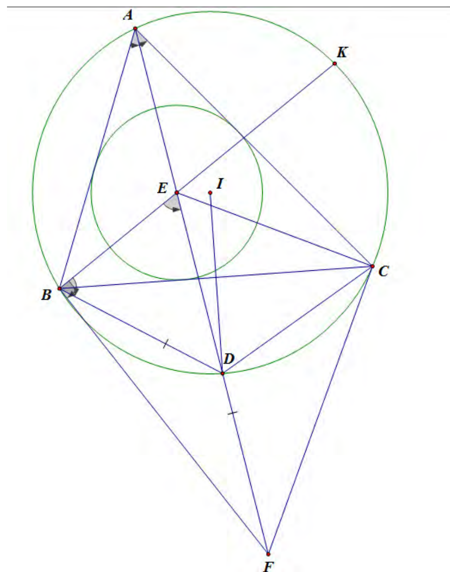
A là giao điểm của AB và AC $\Rightarrow A\left(-\frac{1}{2};\frac{9}{2}\right)$

C là giao điểm của BC và AC $\Rightarrow C\,(5;-1)$

Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 45 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $I\left(\frac{3}{2};\frac{1}{16}\right)$ và $E\,(1;0)$ lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác. Đường tròn (T) tiếp xúc với các cạnh BC và các cạnh AB, AC kéo dài có tâm là $F\,(2;-8)$. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác biết A có tung độ âm.

Lời giải tham khảo :



Gọi D, K là giao điểm thứ hai của AE, BE với đường tròn tâm I

Sử dụng góc nội tiếp và góc có đỉnh bên trong đường tròn ta có $\widehat{EBD}=\widehat{BED}\Rightarrow \Delta EDB$ cân tại D

Ta có đường tròn tâm F tiếp xúc với BC và các cạnh AB, AC kéo dài $\Rightarrow$ AF là phân giác của góc $\widehat{BAC}$ và BF là phân giác ngoài của góc $\widehat{ABC}$

$\Rightarrow$ A, E, F thẳng hàng và BE $\perp$ BF. Tam giác BEF vuông tại B có BD = DE $\Rightarrow$ D là trung điểm của EF

D là trung điểm của EF $\Rightarrow D\left(\frac{3}{2};-4\right)$. Phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là

$$(C):\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{16}\right)^2=\left(\frac{65}{16}\right)^2$$

Phương trình đường thẳng AF đi qua E và F $\Rightarrow AF: 8x+y-8=0$

A là giao điểm của đường tròn (C) và AF $\Rightarrow A\,(...)$

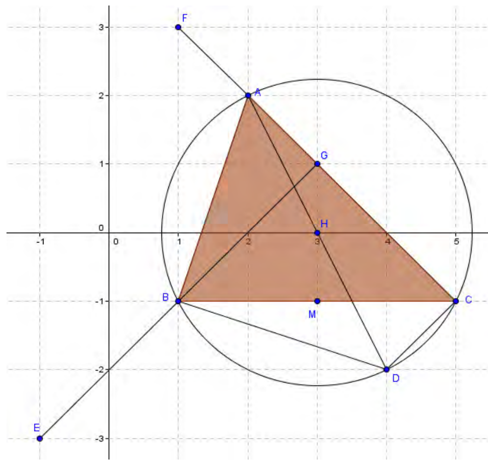
Giả sử điểm $B\,(a;b)$. Ta có $B\in(C)\Rightarrow$ 1 phương trình

BE ⊥ BF ⇒ 1 phương trình. Từ đó ta có điểm B

Bài toán giải quyết xong. (Bài này lười tính hihi)

Đề bài 46 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có điểm $M(3;-1)$ là trung điểm của BC. Đường thẳng AC đi qua điểm $F(1;3)$. Điểm $E(-1;-3)$ thuộc đường cao xuất phát từ B. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác biết điểm $D(4;-2)$ là điểm đối xứng với điểm A qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải tham khảo :



D đối xứng với A qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ⇒ AD là đường kính ⇒ CD ⊥ AC

Giả sử $C(a;b)$. M là trung điểm của BC ⇒ $B(6-a;-2-b)$

Ta có CD ⊥ AC ⇒ $\overrightarrow{CF} \perp \overrightarrow{CD}$

$$\Rightarrow (4-a)(1-a)+(3-b)(-2-b)=0 \Leftrightarrow a^2-5a+b^2-b-2=0 \qquad (1)$$

E thuộc đường cao hạ từ B ⇒ BE ⊥ AC ⇒ $\overrightarrow{BE} \perp \overrightarrow{CF}$

$$\Rightarrow (1-a)(7-a)+(1-b)(3-b)=0 \Leftrightarrow a^2-8a+b^2-4b+10=0 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ⇒ $\left[\begin{array}{l} a=5;b=-1 \\ a=4;b=-2 \end{array}\right. \Rightarrow C(5;-1) \Rightarrow B(1;-1)$

Phương trình đường thẳng AB đi qua B và vuông góc với BD ⇒ $AB: 3x-y-4=0$

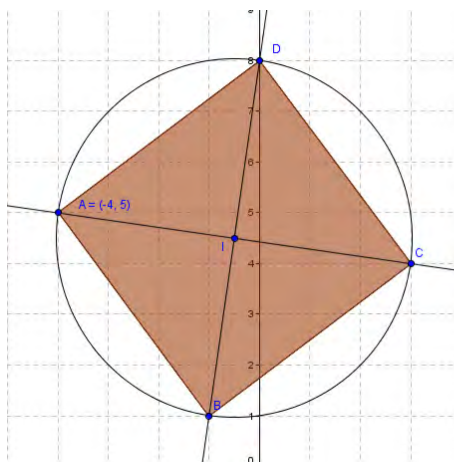
Phương trình đường thẳng AC đi qua C và F ⇒ $AC: x+y-4=0$

A là giao điểm của AB và AC ⇒ $A(2;2)$

Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 47 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình vuông ABCD có đỉnh $A(-4;5)$ và phương trình một đường chéo là $(d): 7x - y + 8 = 0$. Viết phương trình cách cạnh của hình vuông ABCD.

Lời giải tham khảo :



Ta có A không nằm trên $(d) \Rightarrow (d)$ là phương trình đường chéo BD

Phương trình đường chéo AC đi qua A và vuông góc với $(d) \Rightarrow AC: x + 7y - 31 = 0$

Tâm I của hình vuông là giao điểm của AC và BD $\Rightarrow I\left(-\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right)$

I là trung điểm của AC $\Rightarrow C(3;4)$

Ta có AC $= 5\sqrt{2} \Rightarrow$ hình vuông ABCD nội tiếp đường tròn tâm I bán kính $R = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow (C): \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$$

B và D là giao điểm của (d) và $(C) \Rightarrow$ B và D có tọa độ $(-1;1);(0;8)$

Đến đây bài toán quá đơn giản dành cho bạn đọc.

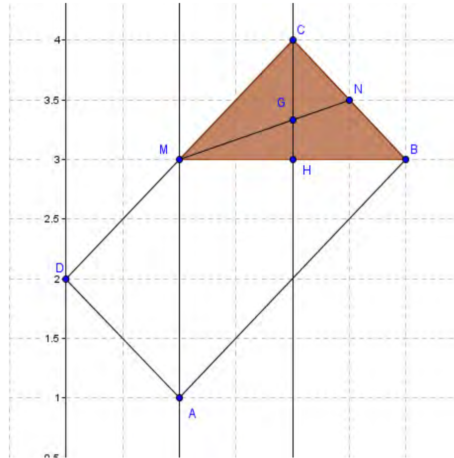
Đề bài 48 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD có AB = 2AD. Gọi M là trung điểm của cạnh CD. Điểm $G\left(2; \frac{10}{3}\right)$ là trọng tâm tam giác BCM. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật biết phương trình đường thẳng AM : $x - 1 = 0$.

Lời giải tham khảo :

Hình chữ nhật ABCD có AB = 2AD và M là trung điểm của CD $\Rightarrow$ AD = CM = DM = BC

$\Rightarrow \Delta BCM$ vuông cân tại M $\Rightarrow$ CG $\perp$ BM (G là trong tâm)

Dễ thấy BM $\perp$ AM $\Rightarrow$ AM // CG (cùng vuông góc với BM)



Phương trình CG đi qua G và song song với AM $\Rightarrow CG : x - 2 = 0$

Gọi H là trung điểm của BM. Ta có độ dài đoạn MH chính là khoảng cách giữa AM và CG $\Rightarrow$ MH = 1

$\Rightarrow$ BM = 2 $\Rightarrow BC = CM = \sqrt{2} \Rightarrow CN = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow MN = \sqrt{\dfrac{5}{2}} \Rightarrow MG = \dfrac{2}{3}MN = \dfrac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{2}}$

Lấy điểm $M(1; m) \in AM \Rightarrow MG^2 = (1-2)^2 + \left(m - \dfrac{10}{3}\right)^2 = \dfrac{10}{9} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = \dfrac{11}{3} \end{array}\right.$

Với $m = 3 \Rightarrow M(1; 3)$. Phương trình MH đi qua M vuông góc với AM $\Rightarrow MH : x = 3 \Rightarrow H(2; 3)$

H là trung điểm của MB $\Rightarrow B(3; 3)$

Lấy điểm $C(2; c) \in CG$ ta có $HG = \dfrac{1}{3}CG \Rightarrow \overrightarrow{HG} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{HC} \Rightarrow C(2; 4)$

M là trung điểm của CD $\Rightarrow D(0; 2)$

Phương trình AD đi qua điểm D và vuông góc với CD $\Rightarrow AD : x + y - 2 = 0$

A là giao điểm của AM và AD $\Rightarrow A(1; 1)$

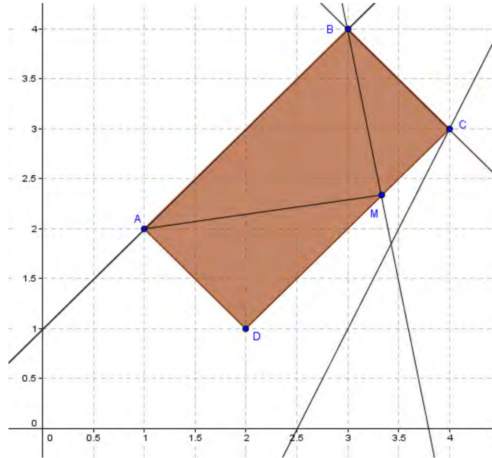
Với $m = \dfrac{11}{3}$ xét tương tự. Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 49 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD có $A(1; 2)$, điểm C nằm trên đường thẳng $(d) : 2x - y - 5 = 0$ và AB = 2AD. Gọi M là điểm nằm trên cạnh CD sao cho DM = 2CM. Xác định tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật biết phương trình cạnh BM : $5x + y - 19 = 0$.

Lời giải tham khảo :

Đặt AD = BC = x $\Rightarrow$ CD = AB = 2x $\Rightarrow CM = \dfrac{1}{3}CD = \dfrac{2x}{3} \Rightarrow BM = \dfrac{\sqrt{13}x}{3}$

$\Rightarrow \cos\widehat{MBC} = \dfrac{BC}{BM} = \dfrac{3}{\sqrt{13}} \Rightarrow \sin\widehat{MBC} = \dfrac{2}{\sqrt{13}} \Rightarrow \cos\widehat{ABM} = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$



Góc giữa AB và BM chính là góc $\widehat{ABM}$. Gọi $\overrightarrow{n} = (a;b)$ là vtpt của đường thẳng AB

$$\Rightarrow \cos\widehat{ABM} = \frac{|5a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{26}} = \frac{2}{\sqrt{13}} \Rightarrow 17a^2+10ab-7b^2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=-b \\ a=\dfrac{7}{17}b \end{array}\right.$$

Với $a=-b \Rightarrow \overrightarrow{n} = (1;-1)$. Phương trình đường thẳng AB đi qua A có vtpt $\overrightarrow{n} \Rightarrow AB: x-y+1=0$

B là giao điểm của AB và BM $\Rightarrow B(3;4)$

Phương trình đường thẳng BC đi qua B và vuông góc với AB $\Rightarrow BC: x+y-7=0$

C là giao điểm của BC và $(d) \Rightarrow C(4;3)$

Phương trình đường thẳng AD đi qua A và vuông góc với AB $\Rightarrow AD: x+y-3=0$

Phương trình đường thẳng CD đi qua C và vuông góc với BC $\Rightarrow CD: x-y-1=0$

D là giao điểm của AD và CD $\Rightarrow D(2;1)$

Trường hợp còn lại chúng ta làm tương tự.

Bài toán giải quyết xong.

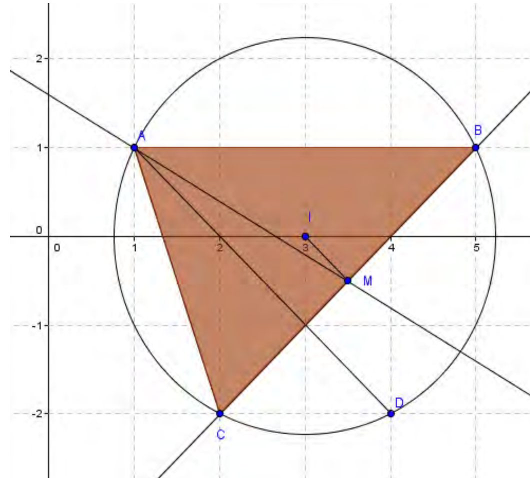
Đề bài 50 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC nhọn. Đường thẳng chứa đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A và đường thẳng BC có phương trình lần lượt là $(d_1): 3x+5y-8=0; (d_2): x-y-4=0$. Đường thẳng qua A vuông góc với BC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm thứ hai $D(4;-2)$. Viết phương trình các cạnh AB và AC biết hoành độ điểm B lớn hơn 3.

Lời giải tham khảo :

Trung điểm M của BC là giao điểm của (d_1) và $(d_2) \Rightarrow M\left(\frac{7}{2};-\frac{1}{2}\right)$

Phương trình đường thẳng AD đi qua D và vuông góc với BC $\Rightarrow AD: x+y-2=0$

A là giao điểm của AD và AM $\Rightarrow A(1;1)$. Giả sử N là trung điểm của AD $\Rightarrow N\left(\frac{5}{2};-\frac{1}{2}\right)$



Phương trình trung trực của AD đi qua N và vuông góc với AD $\Rightarrow (d_3): x - y - 3 = 0$

Phương trình trung trực của BC đi qua M và vuông góc với BC $\Rightarrow (d_4): x + y - 3 = 0$

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC $\Rightarrow$ I là giao điểm của (d_3) và $(d_4) \Rightarrow I(3;0) \Rightarrow IA = \sqrt{5}$

Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có tâm là I và bán kính $R = \sqrt{5}$

$$\Rightarrow (C): (x-3)^2 + y^2 = 5$$

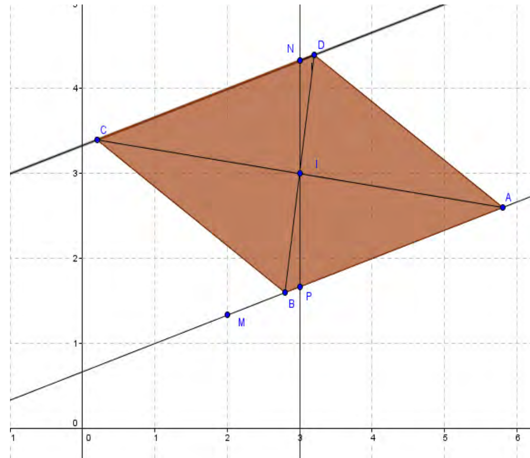
Tọa độ B và C là giao điểm của (C) và $(d_2) \Rightarrow$ B, C có tọa độ $(5;1);(2;-2)$

Hoành độ B lớn hơn 3 $\Rightarrow B(5;1); C(2;-2)$

Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 51 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình thoi ABCD có tâm $I\left(3;3\right)$ và AC = 2BD. Điểm $M\left(2;\dfrac{4}{3}\right)$ thuộc đường thẳng AB, điểm $N\left(3;\dfrac{13}{3}\right)$ thuộc đường thẳng CD. Viết phương trình đường chéo BD biết điểm B có hoành độ nhỏ hơn 3.

Lời giải tham khảo :



Gọi P là điểm đối xứng với N qua I $\Rightarrow P\left(3;\dfrac{5}{3}\right)$ và P thuộc đường thẳng AB

Phương trình đường thẳng AB đi qua M và P $\Rightarrow AB: x-3y+2=0$

Ta có AC = 2BD ⇒ AI = 2BI. Tam giác ABI vuông tại I $\Rightarrow AB = BI\sqrt{5}$ và $\cos\widehat{ABI} = \dfrac{IB}{AB} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

Gọi $\overrightarrow{n} = (a;b)$ là vtcp của đường thẳng BD. Ta có $\overrightarrow{MP} = (3;1)$ là vtcp của đường thẳng AB.

⇒ Góc giữa AB và BD là góc $\widehat{ABI}$ hay $\cos\widehat{ABI} = \cos\left(\overrightarrow{n},\overrightarrow{MP}\right)$

$$\Rightarrow \frac{|3a+b|}{\sqrt{10}.\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow 7a^2+6ab-b^2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=-b \\ a=\dfrac{b}{7}\end{array}\right.$$

Với $a=-b$ chọn $\overrightarrow{n}=(1;-1)$. Phương trình BD đi qua I và có vtcp $\overrightarrow{n} \Rightarrow BD: x+y-6=0$

B là giao điểm của AB và BD $\Rightarrow B\left(4;2\right)$

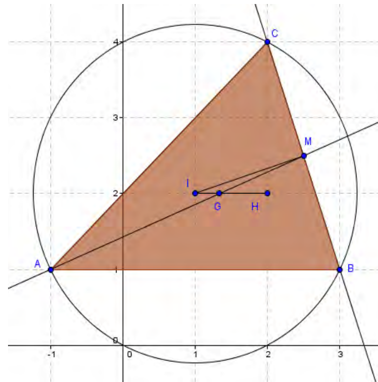
Với $a=\dfrac{b}{7}$ chọn $\overrightarrow{n}=(1;7)$. Phương trình BD đi qua I và có vtcp $\overrightarrow{n} \Rightarrow BD: 7x-y-18=0$

B là giao điểm của AB và BD $\Rightarrow B\left(\dfrac{14}{5};\dfrac{8}{5}\right)$

Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 52 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, biết tọa độ trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC lần lượt là $H(2;2), I(1;2)$ và trung điểm $M\left(\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right)$ của cạnh BC. Hãy xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết $x_B > x_C$ (với x_B, x_C là hoành độ của điểm B và C).

Lời giải tham khảo :



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC $\Rightarrow$ ba điểm G, H, I thẳng hàng và $2HI = 3HG$

Phương trình đường thẳng HI : $y = 2$. $G \in HI \Rightarrow G(g;2)$ và $2\overrightarrow{HI} = 3\overrightarrow{HG} \Rightarrow G\left(\frac{4}{3};2\right)$

Phương trình đường thẳng AG đi qua G và M $\Rightarrow AG : 3x - 7y + 10 = 0$

G là trọng tâm $\Rightarrow AG = 2GM$ và điểm $A \in AG \Rightarrow A(-1;1)$

Phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $(C) : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$

Phương trình đường thẳng BC đi qua M và vuông góc với IM $\Rightarrow BC : 3x + y - 10 = 0$

Tọa độ B và C là giao điểm của BC và $(C) \Rightarrow B(3;1), C(2;4)$

Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 53 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $C(-1;-1)$, phương trình cạnh AB là $x + 2y - 5 = 0$ và $AB = \sqrt{5}$. Trọng tâm G của tam giác ABC thuộc đường thẳng $(d) : x + y - 2 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của tam giác ABC.

Lời giải tham khảo : (đây là một bài tương đối dễ)

Gọi $A(5-2a;a) \in AB$ và $B(5-2b;b) \in AB$

$\Rightarrow AB^2 = 5(a-b)^2 = 5 \Leftrightarrow a - b = \pm 1$ (1)

Tọa độ trọng tâm G của tam giác là $G\left(\frac{10-2a-2b-1}{3};\frac{a+b-1}{3}\right) \in (d)$

$\Rightarrow a + b = 2$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow a = ...; b = ... \Rightarrow A, B$

Đề bài 54 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình vuông ABCD có tâm I, điểm $K(0;2)$ thuộc đoạn IA. M và N lần lượt là trung điểm của cạnh AB và CD và cùng nằm trên đường thẳng $(d): x-1=0$. Q là giao điểm của KM với BC. Xác định tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD biết điểm $H(4;8)$ thuộc đường thẳng NQ.

Lời giải tham khảo :

Gọi $\overrightarrow{n}=(a;b)$ là vecto pháp tuyến của đường thẳng AC. Ta có $\widehat{AIM}=45^o$

$$\Rightarrow \cos\widehat{AIM}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b\\ a=-b\end{array}\right.$$

✓ Với $a=b\Rightarrow\overrightarrow{n}=(1;1)$ phương trình AC đi qua K có vtpt $\overrightarrow{n}\Rightarrow AC: x+y-2=0\Rightarrow I(1;1)$

Lấy điểm $A(a;2-a)\in AC$ phương trình AB đi qua A và vuông góc với $(d): x-1=0$

$\Rightarrow AB: y+a-2=0$ M là giao điểm của AB và MN $\Rightarrow M(1;2-a)\Rightarrow B(2-a;2-a)$

I là giao điểm của AC và MN $\Rightarrow I(1;1)$. I là trung điểm của MN $\Rightarrow N(1;a)$

Phương trình đường thẳng BC đi qua B và song song với MN $\Rightarrow BC: x=2-a$

Phương trình đường thẳng KM đi qua M và K $\Rightarrow KM: ax+y-2=0$

Q là giao điểm của KM và BC $\Rightarrow Q\left(2-a;a^2-2a+2\right)$

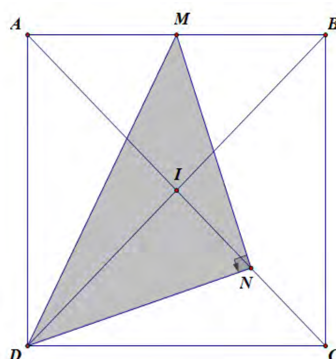
Điểm H thuộc đường thẳng QN $\Rightarrow\overrightarrow{NH}=\alpha\overrightarrow{NQ}\Rightarrow\dfrac{3}{a-1}=\dfrac{a-8}{a^2-3a+2}\Leftrightarrow a^2=1\Leftrightarrow a=\pm1$

- Với $a=1\Rightarrow A(1;1)$ loại vì trùng với điểm I
- Với $a=-1\Rightarrow A(-1;3)\Rightarrow B(3;3)\Rightarrow C(3;-1),D(-1;-1)$

✓ Với $a=-b$ xét tương tự

Đề bài 55 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình vuông ABCD. Điểm $M(1;2)$ là trung điểm của cạnh AB, điểm N nằm trên cạnh AC sao cho AN = 3NC. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông biết phương trình đường thẳng DN là $x+y-1=0$ và hoành độ điểm A lớn hơn 1.

Lời giải tham khảo :



Gọi $a > 0$ là độ dài cạnh hình vuông ABCD $\Rightarrow AM = \frac{a}{2}; CN = \frac{AC}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$

Tam giác AMD vuông tại A $\Rightarrow DM^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$

Tam giác AMN có $MN^2 = AN^2 + AM^2 - 2AM.AN.\cos\widehat{MAN} = \frac{5a^2}{8}$

Tam giác CDN có $DN^2 = CD^2 + CN^2 - 2.DN.CN.\cos\widehat{NCD} = \frac{5a^2}{8}$

$\Rightarrow$ tam giác DMN có $DM^2 = MN^2 + DN^2 \Rightarrow$ tam giác DMN vuông tại N

Phương trình đường thẳng MN đi qua M và vuông góc với DN $\Rightarrow MN : x - y + 1 = 0$

N là giao điểm của MN và DN $\Rightarrow N\,(0;1) \Rightarrow MN^2 = 2 = \frac{5a^2}{8} \Rightarrow a = \frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow DM = 2$

Điểm $D \in DN \Rightarrow D\,(d;1-d) \Rightarrow DM^2 = (d-1)^2 + (d+1)^2 = 4 \Leftrightarrow d = \pm 1$

✓ Với $d = 1 \Rightarrow D\,(1;0)$. Gọi điểm $A\,(a;b)$

Ta có $AD = a = \frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow (a-1)^2 + b^2 = \frac{16}{5}$ (1)

$AM = \frac{a}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow (a-1)^2 + (b-2)^2 = \frac{4}{5}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = \frac{1}{5} \\ a = \frac{9}{5} \end{array}\right. \Rightarrow A\left(\frac{9}{5};\frac{8}{5}\right)$ (do hoành độ điểm A lớn hơn 1)

M là trung điểm của AB $\Rightarrow B\left(\frac{1}{5};\frac{12}{5}\right)$

Phương trình đường thẳng AC đi qua A và N $\Rightarrow AC : x - 3y + 3 = 0$

Phương trình đường thẳng CD đi qua D và vuông góc với AD $\Rightarrow CD : x + 2y - 1 = 0$

C là giao điểm của CD và AC $\Rightarrow C\left(-\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)$

✓ Với $d = -1$ xét tương tự (trường hợp này loại)

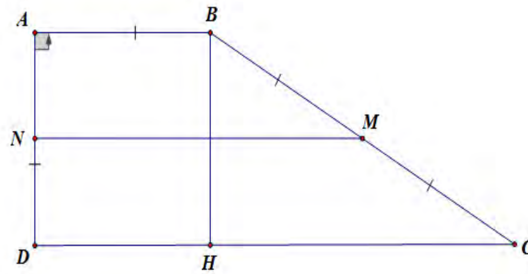
Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 56 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho ABCD là hình thang vuông tại A và D có BC = 2AB = 2AD. Trung điểm của BC là điểm $M\,(1;0)$, đường thẳng AD có phương trình $x - \sqrt{3}y + 3 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh A biết DC > AB

Lời giải tham khảo :

Gọi N là trung điểm của AD $\Rightarrow$ MN $\perp$ AD. Phương trình MN đi qua M và vuông góc với AD

$\Rightarrow MN : \sqrt{3}x + y - \sqrt{3} = 0$. N là giao điểm của AD và MN $\Rightarrow N\left(0;\sqrt{3}\right) \Rightarrow MN = 2$



Gọi $AB = AD = x \Rightarrow BC = 2x$. Gọi H là hình chiếu của B lên CD $\Rightarrow AB = BH = x$

Tam giác BCH vuông tại H $\Rightarrow CE = x\sqrt{3}$. MN là đường trung bình của hình thang ABCD

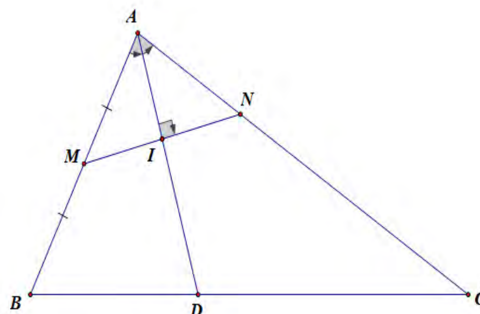
$$\Rightarrow 2MN = AB + CD = x + x + x\sqrt{3} = 4 \Rightarrow x = 4\left(2 - \sqrt{3}\right)$$

A thuộc đường tròn tâm N bán kính $R = 4\left(2 - \sqrt{3}\right) \Rightarrow (C) : x^2 + \left(y - \sqrt{3}\right)^2 = 4\left(2 - \sqrt{3}\right)^2$

A là giao điểm của AD và (C). Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 57 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có diện tích bằng 96. Gọi $M(2;0)$ là trung điểm của AB, phân giác trong góc A có phương trình $(d) : x - y - 10 = 0$. Đường thẳng AB tạo với đường thẳng (d) một góc α thỏa mãn $\cos\alpha = \frac{3}{5}$. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Lời giải tham khảo :



Giả sử $\overrightarrow{n} = (a;b)$ là vecto pháp tuyến của đường thẳng AB

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{|a-b|}{\sqrt{2}.\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow 7a^2 - 10ab + 7b^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 7b \\ a = \frac{b}{7} \end{array}\right.$$

✓ Với $a = 7b \Rightarrow \overrightarrow{n} = (7;1)$ phương trình AB đi qua M và có vtpt $\overrightarrow{n} \Rightarrow AB : 7x + y - 14 = 0$

A là giao điểm của AB và $(d) \Rightarrow A(3;7)$. M là trung điểm của AB $\Rightarrow B(1;7)$

Từ M kẻ đường thẳng vuông góc với (d) cắt (d) tại I và cắt AC tại N $\Rightarrow MN : x + y - 2 = 0$

I là giao điểm của MN và $(d) \Rightarrow I(6;-4)$. I là trung điểm của MN $\Rightarrow N(10;-8)$

Phương trình đường thẳng AC đi qua A và N $\Rightarrow AC : x + 7y + 46 = 0$

$AB = 10\sqrt{2}; d(B, AC) = \dfrac{96}{\sqrt{50}}$. Diện tích tam giác ABC là

$S = \dfrac{1}{2}.AC.d(B, AC) = 96 \Rightarrow AC = 10\sqrt{2} \Rightarrow C(17; -9)$

✓ Với $a = \dfrac{b}{7}$ xét tương tự

Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 58 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC vuông cân tại A. Biết phương trình cạnh BC là $(d) : x - 3y + 13 = 0$, điểm $M(-1; -1)$ thuộc cạnh AB và nằm ngoài đoạn AB, điểm $N(3; 2)$ thuộc đường thẳng AC. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Lời giải tham khảo :

Gọi $\overrightarrow{n} = (a; b)$ là vecto pháp tuyến của đường thẳng AB. Tam giác ABC vuông cân tại A

$$\Rightarrow \cos\widehat{ABC} = \frac{|a - 3b|}{\sqrt{10}.\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 4a^2 + 6ab - 4b^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -2b \\ a = \dfrac{b}{2} \end{array}\right.$$

✓ Với $a = -2b \Rightarrow \overrightarrow{n} = (2; -1)$. Phương trình đường thẳng AB : $2x - y + 1 = 0$

B là giao điểm của AB và BC $\Rightarrow B(2; 5)$

Đường thẳng AC đi qua N và vuông góc với AB $\Rightarrow AC : x + 2y - 7 = 0 \Rightarrow A(1; 3)$

Ta có $x_M < x_A < x_B \Rightarrow$ M nằm ngoài A và B $\Rightarrow$ thỏa mãn

C là giao điểm của BC và AC $\Rightarrow C(-1; 4)$

✓ Với $b = 2a$ xét tương tự (trường hợp này loại)

Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 59 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình bình hành ABCD có điểm $M(-3; 0)$ là trung điểm của cạnh AB, điểm $H(0; -1)$ là hình chiếu vuông góc của B lên AD và điểm $G\left(\dfrac{4}{3}; 3\right)$ là trọng tâm của tam giác BCD. Tìm tọa độ các điểm B và D của hình bình hành.

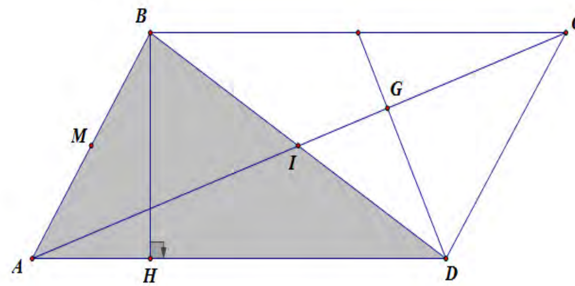
Lời giải tham khảo :

Gọi $I(a; b)$ là tâm của hình bình hành, khi đó ta có $\overrightarrow{CG} = 2\overrightarrow{GI} \Rightarrow C(4 - 2a; 9 - 2b)$

I là trung điểm của AC $\Rightarrow A(4a - 4; 4b - 9)$. M là trung điểm của AB $\Rightarrow B(-4a - 2; 9 - 4b)$

I là trung điểm của BD $\Rightarrow D(6a + 2; 6b - 9)$

Ta có $\overrightarrow{HA} = (4a - 4; 4b - 8); \overrightarrow{BH} = (4a + 2; 4b - 10); \overrightarrow{AD} = (2a + 6; 2b)$



H là hình chiếu của B lên AD nên ta có

$\overrightarrow{AD}//\overrightarrow{HA} \Leftrightarrow \dfrac{4a-4}{2b} = \dfrac{4b-8}{2a+6} \Leftrightarrow a = 2b-3$ (1)

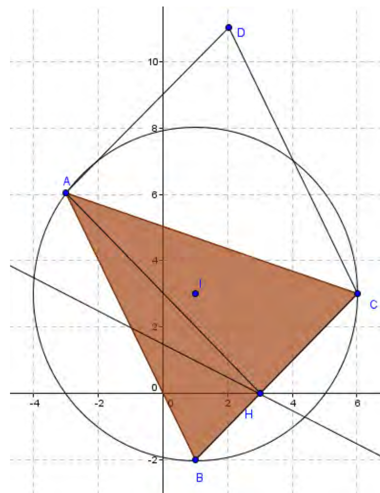
$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BH} = 0 \Leftrightarrow (2a+6)(4a+2) + 2b(4b-10) = 0$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow I(-3;0)$ hoặc $I\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$

Đến đây bài toán qua đơn giản.

Đề bài 60 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình bình hành ABCD với điểm $A(-3;6)$. Biết tam giác ABC có AB.AC $= 60\sqrt{2}$ và nội tiếp đường tròn có tâm $I(1;3)$, bán kính R $= 5$. Hình chiếu của điểm A xuống cạnh BC thuộc đường thẳng $(d): x+2y-3=0$. Hãy tìm tọa độ các đỉnh B, C, D biết hoành độ hình chiếu của A bé hơn 1 và hoành độ điểm B bé hơn hoành độ điểm C.

Lời giải tham khảo :



Ta có diện tích tam giác ABC $S = \dfrac{AB.AC.BC}{4R} = 3\sqrt{2}.BC = \dfrac{1}{2}AH.BC \Rightarrow AH = 6\sqrt{2}$

Lấy điểm $H(3-2h;h) \in (d) \Rightarrow (6-2h)^2 + (h-6)^2 = 72 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} h=0 \\ h=\dfrac{36}{5} \end{array}\right. \Rightarrow H(3;0)$

Phương trình đường thẳng BC đi qua H và vuông góc với $AH \Rightarrow BC : x - y - 3 = 0$

Phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC $(C) : (x-1)^2 + (y-3)^2 = 25$

Tọa độ B và C là giao điểm của BC và $(C) \Rightarrow B(1;-2), C(6;3)$

Gọi K là tâm của hình bình hành ABCD $\Rightarrow I\left(\frac{3}{2};\frac{9}{2}\right)$

K là trung điểm của BD $\Rightarrow D(2;11)$

Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 61 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết chân ba đường cao hạ từ các đỉnh A, B, C tương ứng là $M(-1;-2); N(2;2); P(-1;2)$

Lời giải tham khảo :

Dễ dàng chứng minh được kết quả sau : Cho tam giác ABC có ba gọc nhọn. Trực tâm của tam giác ABC trùng với tâm đường tròn nội tiếp tam giác có ba đỉnh là chân ba đường cao của tam giác ABC.

Áp dụng vào bài toán ta có H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP

Phương trình đường thẳng MN đi qua M và N $\Rightarrow MN : 4x - 3y - 2 = 0$

Phương trình đường thẳng MP đi qua M và P $\Rightarrow MP : x + 1 = 0$

Phương trình đường thẳng NP đi qua N và P $\Rightarrow NP : y - 2 = 0$

Gọi tọa độ điểm $H(a;b)$ ta có $d(H, MN) = d(H, NP) = d(H, MP)$

$\Leftrightarrow \frac{|a+1|}{1} = \frac{|b-2|}{1} = \frac{|4a-3b-2|}{5} \Rightarrow H(0;1)$

Đến đây bài toán đơn giản rồi.

Đề bài 62 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $H(1;1)$ là chân đường cao hạ từ đỉnh A, điểm $M(0;3)$ là trung điểm của cạnh BC. Biết rằng $\widehat{BAH} = \widehat{HAM} = \widehat{MAC}$. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

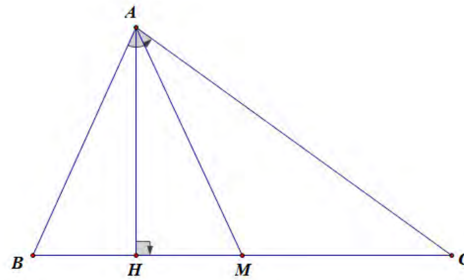
Lời giải tham khảo :

Tam giác BAH có AH là đường cao và phân giác $\Rightarrow$ tam giác BAH cân tại A $\Rightarrow$ H là trung điểm của BM

$\Rightarrow B(2;-1)$. M là trung điểm của BC $\Rightarrow C(-2;7)$

Phương trình AH đi qua H và vuông góc với BC $\Rightarrow AH : 2x - y - 1 = 0$

Điểm $A \in AH \Rightarrow A(a;2a-1)$. Có MH $= \sqrt{5}$, MC $= 2\sqrt{5}$



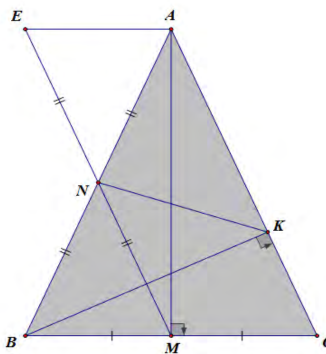
Tam giác CAH có AM là phân giác góc A $\Rightarrow \dfrac{MH}{MC} = \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow AC = 2AH$

$\Rightarrow (a+2)^2 + (2a-8)^2 = 4(a-1)^2 + 4(2a-2)^2 \Leftrightarrow a = ... \Rightarrow A...$

Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 63 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC cân tại A. Điểm $K\left(\dfrac{6}{5}; -\dfrac{3}{5}\right)$ là chân đường cao hạ từ B. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AB. Điểm $E(-3;0)$ là điểm đối xứng với M qua N. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết điểm M thuộc đường thẳng $(d): 4x + y - 2 = 0$.

Lời giải tham khảo :



Tam giác ABK vuông tại K có N là trung điểm của AB ⇒ NK = NA = NB

Tứ giác EAMB là hình bình hành (hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường)

mà AM ⊥ BM ⇒ EAMB là hình chữ nhật ⇒ NE = NK

Xét tam giác EKM có N là trung điểm của EM và NK = NE = NM ⇒ tam giác EKM vuông tại K

Đường thẳng KM đi qua K và vuông góc với EK $\Rightarrow KM: 7x - y - 9 = 0$

M là giao điểm của KM và $(d) \Rightarrow M(1;-2)$. N là trung điểm của EM $\Rightarrow N(-1;-1)$

B thuộc đường tròn tâm M bán kính MK $\Rightarrow B \in (C_1): (x-1)^2 + (y+2)^2 = 2$

B thuộc đường tròn tâm N bán kính NK $\Rightarrow B \in (C_2): (x+1)^2 + (y+1)^2 = 5$

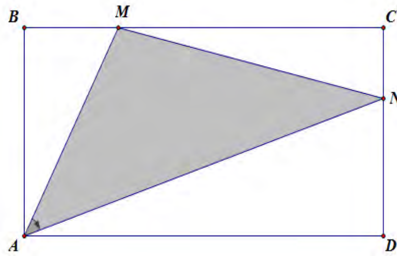
B là giao điểm của (C_1) và $(C_2) \Rightarrow B(0;-3)$. M là trung điểm của BC $\Rightarrow C(2;-1)$

N là trung điểm của AB $\Rightarrow A(-2;1)$

Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 64 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD có AD = 2AB. Điểm $N(4;2)$ thuộc đoạn CD thỏa mãn DN = 2CN. Gọi M là điểm trên BC sao cho BC = 4BM. Xác định tọa độ điểm A biết phương trình đường thẳng AM : $x+2y-18=0$

Lời giải tham khảo :



Đặt AB = x $\Rightarrow$ AD = 2x. BC = 4BM $\Rightarrow BM = \dfrac{x}{2}, CM = \dfrac{3x}{2}, DN = \dfrac{2x}{3}, CN = \dfrac{x}{3}$

Tam giác ABM vuông tại B $\Rightarrow AM = \dfrac{x\sqrt{5}}{2}$

Tam giác MCN vuông tại C $\Rightarrow MN = \dfrac{x\sqrt{85}}{6}$

Tam giác ADN vuông tại D $\Rightarrow AN = \dfrac{x\sqrt{40}}{3}$

Áp dụng định lý Cosin vào tam giác AMN có $\cos\widehat{MAN} = \dfrac{AN^2+AM^2-MN^2}{2.AM.AN} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Gọi $\overrightarrow{n} = (a;b)$ là vtpt của đường thẳng AN, ta có vtpt của đường thẳng AM là $\overrightarrow{n_1} = (1;2)$

$$\Rightarrow \cos\widehat{MAN} = \frac{|a+2b|}{\sqrt{5}.\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=3b \\ a=-\dfrac{b}{3} \end{array}\right.$$

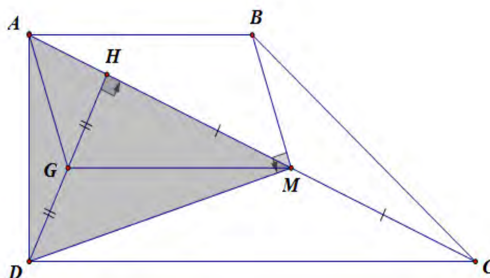
✓ Với $a=3b \Rightarrow AN: 3x+y-14=0 \Rightarrow A(2;8)$

✓ Với $a=-\dfrac{b}{3} \Rightarrow AN: x-3y+2=0 \Rightarrow A(10;4)$

Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 65 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình thang ABCD vuông tại A và D có $B(8;4)$ và CD = 2AB, phương trình cạnh AD : $x-y+2=0$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của D trên AC và điểm $M(5;2)$ là trung điểm của HC. Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của hình thang.

Lời giải tham khảo :



Gọi G là trung điểm của DH. Tam giác DHC có MG là đường trung bình ⇒ MG // CD và CD = 2MG

⇒ AGMB là hình bình hành ⇒ AG // BM

Xét tam giác ADM có DH là đường cao và MG ⊥ AD ⇒ G là trực tâm ⇒ AG ⊥ DM

⇒ DM ⊥ BM. Phương trình DM đi qua M và vuông góc với BM ⇒ $DM : 3x + 2y - 19 = 0$

D là giao điểm của AD và DM ⇒ $D\,(3;5)$

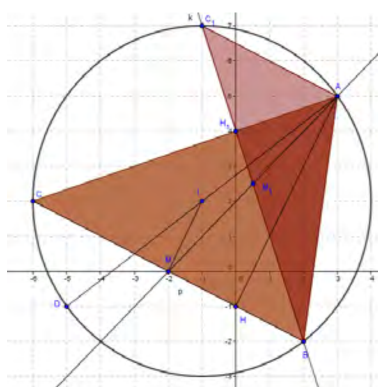
Phương trình đường thẳng AB đi qua B và vuông góc với AD ⇒ $AB : x + y - 12 = 0$

A là giao điểm của AB và AD ⇒ $A\,(5;7)$

Đến đây bài toán đơn giản rồi.

Đề bài 66 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (C) : $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$, phương trình đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh A có phương trình là $(d) : x - y + 2 = 0$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A lên cạnh đường thẳng BC nằm trên trục tung. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết đỉnh A có hoành độ dương.

Lời giải tham khảo :



Đường tròn (C) có tâm $I\,(-1;2)$ và bán kính R = 5

A là giao điểm của (C) và trung tuyến xuất phát từ A ⇒ $A\,(3;5)$ (A có hoành độ dương)

Điểm M là trung điểm của BC ⇒ $M \in (d) \Rightarrow M\,(m; m+2)$. Chân đường cao hạ từ A $\in Oy \Rightarrow H\,(0;h)$

$\Rightarrow \overrightarrow{IM} = (m+1; m)\,; \overrightarrow{AH} = (3; 5-h)\,; \overrightarrow{HM} = m; m-h+2$

Ta có $\overrightarrow{IM} // \overrightarrow{AH} \Rightarrow \dfrac{m+1}{3} = \dfrac{m}{5-h}$ (1)

$\overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{HM} \Rightarrow m(m+1) + m(m-h+2) = 0$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

✓ Với $m = -2 \Rightarrow h = -1 \Rightarrow (-2; 0)\,; H(0; -1)$

Phương trình đường thẳng BC đi qua M và H $\Rightarrow BC : x + 2y + 2 = 0$

B và C là giao điểm của BC và $(C) \Rightarrow B$ và C

✓ Với $m = \dfrac{1}{2}$ xét tương tự

Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 67 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai điểm $A(-1; -2), B(-3; 2)$ và đường thẳng $(d) : x + 2y - 3 = 0$, đường tròn $(C) : x^2 + y^2 + 6x + 2y - 40 = 0$. Viết phương trình đường tròn (T) có tâm nằm trên đường thẳng (d) và cắt (C) tại hai điểm C, D sao cho tứ giác ABCD là hình bình hành.

Lời giải tham khảo :

Đường tròn (C) có tâm $I(-3; -1)$. Gọi H là tâm đường tròn (T) Đường tròn (T) cắt (C) tại CD $\Rightarrow$ IH $\perp$ CD hay IH $\perp$ AB (do ABCD là hình bình hành)

Phương trình đường thẳng IH đi qua H và vuông góc với AB $\Rightarrow IH : x - 2y + 1 = 0$

H là giao điểm của IH và $(d) \Rightarrow H(1; 1)$. IH cắt CD tại trung điểm N của CD

Gọi $G(a; b)$ là tâm của hình bình hành. Điểm $M(-2; 0)$ là trung điểm của AB

ABCD là hình bình hành nên G là trung điểm của MN $\Rightarrow N(2a + 2; 2b)$

Điểm $N \in IH \Rightarrow 2a + 2 - 4b + 1 = 0 \Leftrightarrow 2a - 4b = -3$ (1)

G là tâm của hình bình hành $\Rightarrow$ G là trung điểm của AC $\Rightarrow C(2a + 1; 2b + 2)$

$C \in (C) \Rightarrow (2a + 5)^2 + (2b + 3)^2 = 50$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow G(....)$

Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 68 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình vuông ABCD có điểm $A(1; 7)$, điểm $M(7; 5)$ thuộc đoạn thẳng BC, điểm $N(4; 1)$ thuộc đoạn thẳng CD. Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của hình vuông.

Lời giải tham khảo :

Gọi $\overrightarrow{n} = (a; b)$ là vecto pháp tuyến của đường thẳng AB

Phương trình đường thẳng AB đi qua A và có vtpt $\overrightarrow{n} \Rightarrow AB : ax + by - a - 7b = 0$

Phương trình đường thẳng AD đi qua A và vuông góc với AB $\Rightarrow AD : bx - ay - b + 7a = 0$

ABCD là hình vuông $\Rightarrow d(M, AD) = d(N, AB)$

$$\Leftrightarrow \frac{|6b + 2a|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3a - 6b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 12b \end{array}\right.$$

✓ Với $a = 0 \Rightarrow \overrightarrow{n} = (0; 1) \Rightarrow AB : y - 7 = 0$

Phương trình AD : $x - 1 = 0$. Phương trình BC qua M và song song với AD $\Rightarrow BC : y = 5$

Phương trình đường thẳng CD đi qua N và song song với AB $\Rightarrow CD : x = 4$

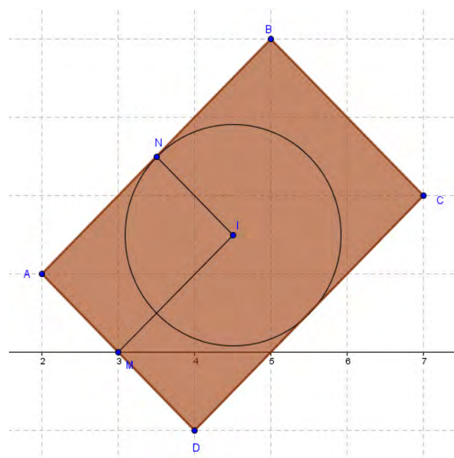
$\Rightarrow B(7; 7); C(7; 1); D(1; 1)$

✓ Với $a = 12b$ xét tương tự

Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 69 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 12. Điểm $I\left(\frac{9}{2}; \frac{3}{2}\right)$ là tâm của hình chữ nhật, điểm $M(3; 0)$ là trung điểm của cạnh AD. Xác định tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$.

Lời giải tham khảo :



Phương trình đường thẳng AD đi qua M và vuông góc với $IM \Rightarrow AD : x + y - 3 = 0$

Gọi N trung điểm của AB. Ta có $IM = \frac{3}{\sqrt{2}}$. Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là

$$S = AB.AD = 2IM.2IN = 12 \Rightarrow IN = \sqrt{2}$$

$\Rightarrow N$ thuộc đường tròn tâm I và bán kính là $IN = \sqrt{2} \Rightarrow (C) : \left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 2$

Phương trình đường thẳng IN đi qua I và vuông góc với $IM \Rightarrow IN : x + y - 6 = 0$

N là giao điểm của (C) và $IN \Rightarrow N\left(\frac{7}{2}; \frac{5}{2}\right), N\left(\frac{11}{2}; \frac{1}{2}\right)$

✓ Với $N\left(\frac{7}{2}; \frac{5}{2}\right)$ phương trình đường thẳng AB đi qua N vuông góc với $IN \Rightarrow AB : x - y - 1 = 0$

A là giao điểm của AD và AB $\Rightarrow A(2; 1)$, N là trung điểm của AB $\Rightarrow B(5; 4)$

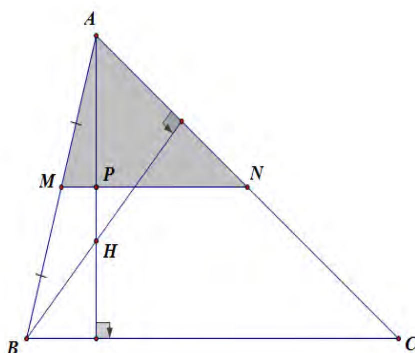
I là trung điểm của AC $\Rightarrow C(7; 2)$, I là trung điểm của BD $\Rightarrow D(4; -1)$

✓ Với $N\left(\frac{11}{2}; \frac{1}{2}\right)$ xét tương tự

Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 70 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có phương trình đường cao kẻ từ đỉnh A là $(d) : 3x - y + 5 = 0$, trực tâm $H(-2; -1)$, $M\left(\frac{1}{2}; 4\right)$ là trung điểm của AB, $BC = \sqrt{10}$. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác giác ABC biết hoành độ điểm B bé hơn hoành độ điểm C.

Lời giải tham khảo :



Gọi N là trung điểm của AC $\Rightarrow MN = \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

Phương trình đường thẳng MN đi qua M và vuông góc với $(d) \Rightarrow MN : x + 3y - \frac{25}{2} = 0$

Gọi P là giao điểm của MN và $(d) \Rightarrow P\left(-\frac{1}{4}; \frac{17}{4}\right)$

Điểm $N \in MN \Rightarrow N\left(\frac{25}{2} - 3n; n\right) \Rightarrow MN^2 = (12 - 3n)^2 + (4 - n)^2 = \frac{10}{4}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = \frac{9}{2} \\ n = \frac{7}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} N\left(-1; \frac{9}{2}\right) \\ N\left(2; \frac{7}{2}\right) \end{array}\right.$ Nhận điểm $N\left(-1; \frac{9}{2}\right)$ do I nằm giữa M và N

Điểm $A \in (d) \Rightarrow A(a; 3a+5)$. M là trung điểm của AB $\Rightarrow B(1-a; 3-3a)$

H là trực tâm tam giác ABC $\Rightarrow$ BH $\perp$ AN $\Rightarrow \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AN} = 0$

Bài toán đến đây đơn giản.

Đề bài 71 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD có diện tích bằng 30 và hai điểm $M(1;4), N(-4;-1)$ lần lượt nằm trên hai đường thẳng AB và AD. Phương trình đường chéo AC là $7x + 4y - 13 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD biết hai điểm A và D đều có hoành độ âm.

Lời giải tham khảo :

Do điểm $A \in AC \Rightarrow A(4a-1; 5-7a)$. Có AM $\perp$ AN $\Rightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN} = 0$

$$\Rightarrow (4a-2)(4a+3) + (1-7a)(6-7a) = 0 \Leftrightarrow 65a^2 - 45a = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = \dfrac{9}{13} \end{array}\right. \Rightarrow A(-1;5)$$

Phương trình đường thẳng AB đi qua A và M $\Rightarrow AB : x + 2y - 9 = 0$

Phương trình đường thẳng AD đi qua A và N $\Rightarrow AD : 2x - y + 7 = 0$

Điểm $D \in AD \Rightarrow D(d; 2d+7)$ và $B \in AB \Rightarrow B(9-2b; b)$

Gọi I là tâm hình chữ nhật $\Rightarrow I\left(\dfrac{d+9-2b}{2}; \dfrac{2d+7+b}{2}\right) \in AC \Rightarrow 3d - 2b + 13 = 0$ (1)

$AD = \sqrt{5}.|d+1|$ và $AB = \sqrt{5}.|b-5|$. Diên tích hình chữ nhật ABCD là

$S = AB.AD = 5.|d+1|.|b-5| = 30$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow d = -3; b = 2$ (do điểm D có hoành độ âm) $\Rightarrow D(-5;-3); B(5;2)$

Tọa độ tâm $I\left(0; -\dfrac{1}{2}\right) \Rightarrow C(1;-6)$

Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 72 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có diện tích bằng 1, điểm $B(1;-2)$ và phương trình đường cao xuất phát từ đỉnh A là $(d) : x - y + 3 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của tam giác ABC biết điểm C thuộc đường thẳng $(d_1) : 2x + y - 1 = 0$.

Lời giải tham khảo :

Phương trình đường thẳng BC đi qua B và vuông góc với $(d) \Rightarrow BC : x + y + 1 = 0$

C là giao điểm của BC và $(d_1) \Rightarrow C(2;-3) \Rightarrow BC = \sqrt{2}$

Gọi H là chân đường cao hạ từ A $\Rightarrow$ H là giao điểm của (d) và BC $\Rightarrow H(-2;1)$

Diện tích tam giác ABC là $S = \frac{1}{2}AH.BC = 1 \Rightarrow AH = \sqrt{2}$

Điểm $A \in (d) \Rightarrow A(a; a+3)$

$\Rightarrow AH^2 = (a+2)^2 + (a+2)^2 = 2 \Rightarrow a = -3; a = -1 \Rightarrow A$

Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 73 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD có điểm $M(3;0)$ là trung điểm của cạnh AD, đỉnh B nằm trên đường thẳng $(d): x - y - 1 = 0$ và đường chéo AC có phương trình $x - 5y + 3 = 0$. Biết điểm A có tung độ bé hơn bằng 1. Xác định tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD.

Lời giải tham khảo :

Điểm $A \in AC \Rightarrow A(5a-3; a)$. M là trung điểm của AD $\Rightarrow D(9-5a; -a)$

Điểm $B \in (d) \Rightarrow B(b; b-1)$. Gọi I là tâm của hình chữ nhật

$\Rightarrow I\left(\frac{9-5a+b}{2}; \frac{-a+b-1}{2}\right) \in AC \Rightarrow 9 - 5a + b + 5a - 5b + 5 + 6 = 0 \Leftrightarrow b = 5 \Rightarrow B(5;4)$

Có AB ⊥ AM $\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = 0 \Rightarrow (5a-6)(5a-8) + a(a-4) = 0 \Leftrightarrow 26a^2 - 74a + 48 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = \frac{24}{13} \end{array}\right.$

✓ Với $a = 1 \Rightarrow A(2;1) \Rightarrow D(4;-1); I\left(\frac{9}{2}; \frac{3}{2}\right) \Rightarrow C(7;2)$

✓ Với $a = \frac{24}{13} \Rightarrow ...$

Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 74 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình vuông $ABCD$ có M là trung điểm cạnh BC, phương trình đường thẳng $DM: x - y - 2 = 0$. Đỉnh $C(3;-3)$ và đỉnh A thuộc đường thẳng $(d): 3x + y - 2 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của hình vuông.

Lời giải tham khảo :

Đặt $AB = a$. Xét ΔDCM vuông tại C ta có

$$DM^2 = CM^2 + CD^2 = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow DM = \frac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \cos\widehat{CMD} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Gọi $\overrightarrow{n} = (a;b)$ là vecto pháp tuyến của đường thẳng BC, ta có

$$\cos\widehat{CMD} = \frac{|a-b|}{\sqrt{2}.\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow 3a^2 - 10ab + 3b^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 3b \\ b = 3a \end{array}\right.$$

✓ Với $a = 3b \Rightarrow \overrightarrow{n} = (3;1) \Rightarrow CB : 3x + y - 6 = 0$

Phương trình đường thẳng CD đi qua C và vuông góc với BC $\Rightarrow CD : x - 3y - 12 = 0 \Rightarrow D(-3;-5)$

Phương trình đường thẳng AD đi qua D và song song với BC $\Rightarrow AD : 3x + y + 14 = 0$ có AD // $(d) \Rightarrow$ loại

✓ Với $b = 3a \Rightarrow \overrightarrow{n} = (1;3) \Rightarrow BC : x + 3y + 6 = 0$

Phương trình đường thẳng CD đi qua C và vuông góc với BC $\Rightarrow CD : 3x - y - 12 = 0 \Rightarrow D(5;3)$

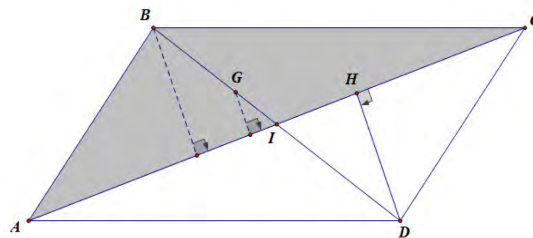
Phương trình đường thẳng AD đi qua A và song song với BC $\Rightarrow AD : x + 3y - 14 = 0 \Rightarrow A(-1;5)$

Phương trình đường thẳng AB đi qua A và song song với CD $\Rightarrow AB : 3x - y + 8 = 0 \Rightarrow B(-3;-1)$

Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 75 : Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình bình hành $ABCD$ có phương trình đường chéo $AC : x - y + 1 = 0$, điểm $G(1;4)$ là trọng tâm của tam giác ABC. Điểm $E(0;-3)$ thuộc đường cao kẻ từ D của tam giác ACD. Tìm tọa độ các đỉnh của hình bình hành đã cho biết diện tích của tứ giác $AGCB$ bằng 16 và điểm A có hoành độ dương.

Lời giải tham khảo



Ta có $d(G, AC) = \sqrt{2}$, G là trọng tâm tam giác ABC $\Rightarrow d(B, AC) = 3d(G, AC) = 3\sqrt{2}$

ABCD là hình bình hành $\Rightarrow d(B, AC) = d(D, AC) = 3\sqrt{2}$

Phương trình đường cao DE của tam giác ACD đi qua E và vuông góc với AC$\Rightarrow DE : x + y + 3 = 0$

Điểm $D \in DE \Rightarrow D(d; -d - 3) \Rightarrow d(D, AC) = \dfrac{|2d + 4|}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow |d + 2| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d = 1 \\ d = 5 \end{array}\right.$

- Với $d = 1 \Rightarrow D(1;-4)$. Gọi I là tâm của hình bình hành $\Rightarrow I(\alpha; \alpha + 1)$

  G là trọng tâm tam giác ABC $\Rightarrow \overrightarrow{DI} = 3\overrightarrow{IG} \Rightarrow I(1;2)$

  I là trung điểm của BD $\Rightarrow B(1;8)$

  Mặt khác $S_{ABC} = \dfrac{3}{2}S_{AGCB} = 24 \Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{1}{2}.AC.d(B, AC) = 24 \Rightarrow AC = 8\sqrt{2} \Rightarrow IA = 4\sqrt{2}$

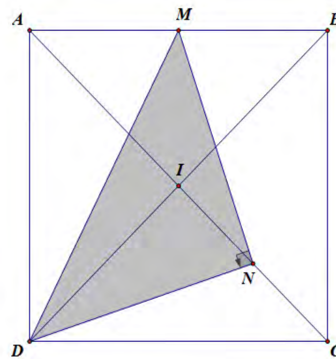
Điểm $A \in AC \Rightarrow A(a; a+1) \Rightarrow IA^2 = (a-1)^2 + (a-1)^2 = 32 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 5 \\ a = -3 \end{array}\right. \Rightarrow A(5; 6)$

I là trung điểm của AC $\Rightarrow C(-3; -2)$

- Với $d = 5$ xét tương tự

Đề bài 76 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình vuông ABCD. Điểm $M(1; 2)$ là trung điểm của cạnh AB, điểm N nằm trên cạnh AC sao cho AN = 3NC. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông biết phương trình đường thẳng DN là $x + y - 1 = 0$ và hoành độ điểm A lớn hơn 1.

Lời giải tham khảo



Gọi $a > 0$ là độ dài cạnh hình vuông ABCD $\Rightarrow AM = \dfrac{a}{2}; CN = \dfrac{AC}{4} = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$

Tam giác AMD vuông tại A $\Rightarrow DM^2 = a^2 + \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{5a^2}{4}$

Tam giác AMN có $MN^2 = AN^2 + AM^2 - 2AM.AN.\cos\widehat{MAN} = \dfrac{5a^2}{8}$

Tam giác CDN có $DN^2 = CD^2 + CN^2 - 2.DN.CN.\cos\widehat{NCD} = \dfrac{5a^2}{8}$

$\Rightarrow$ tam giác DMN có $DM^2 = MN^2 + DN^2 \Rightarrow$ tam giác DMN vuông tại N

Phương trình đường thẳng MN đi qua M và vuông góc với DN $\Rightarrow MN : x - y + 1 = 0$

N là giao điểm của MN và DN $\Rightarrow N(0; 1) \Rightarrow MN^2 = 2 = \dfrac{5a^2}{8} \Rightarrow a = \dfrac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow DM = 2$

Điểm $D \in DN \Rightarrow D(d; 1-d) \Rightarrow DM^2 = (d-1)^2 + (d+1)^2 = 4 \Leftrightarrow d = \pm 1$

- Với $d = 1 \Rightarrow D(1; 0)$. Gọi điểm $A(a; b)$

  Ta có $AD = a = \dfrac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow (a-1)^2 + b^2 = \dfrac{16}{5}$ (1)

  $AM = \dfrac{a}{2} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow (a-1)^2 + (b-2)^2 = \dfrac{4}{5}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{1}{5} \\ a=\dfrac{9}{5} \end{array}\right. \Rightarrow A\left(\dfrac{9}{5};\dfrac{8}{5}\right)$ (do hoành độ điểm A lớn hơn 1)

M là trung điểm của AB $\Rightarrow B\left(\dfrac{1}{5};\dfrac{12}{5}\right)$

Phương trình đường thẳng AC đi qua A và N $\Rightarrow AC: x-3y+3=0$

Phương trình đường thẳng CD đi qua D và vuông góc với AD $\Rightarrow CD: x+2y-1=0$

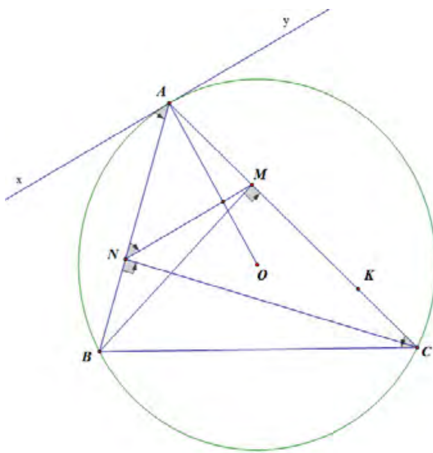
C là giao điểm của CD và AC $\Rightarrow C\left(-\dfrac{3}{5};\dfrac{4}{5}\right)$

- Với $d=-1$ xét tương tự (trường hợp này loại)

Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 77 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(C): x^2+y^2=25$, điểm $K(2;1)$ thuộc đường thẳng AC. Hai đường cao BM và CN. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết phương trình đường thẳng $MN: 4x-3y+10=0$ và điểm A có hoành độ âm.

Lời giải tham khảo



Đường tròn (C) tâm $O(0;0)$ và bán kính $R=5$ Tứ giác $BNMC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ACB}=\widehat{MNA}$ (cùng bù với góc $\widehat{MNB}$)

Gọi xy là tiếp tuyến với đường tròn (C) tại A, ta có $\widehat{ACB}=\widehat{xAB}$ (cùng chắn cung AB)

Do đó $\widehat{xAB}=\widehat{MNA}$ hai góc ở vị trí so le trong $\Rightarrow xy \,//\, MN \Rightarrow OA \perp$ MN

Phương trình đường thẳng IA đi qua O và vuông góc với $MN \Rightarrow OA: 3x+4y=0$

A là giao điểm của đường tròn (C) và $OA \Rightarrow A(-4;3)$ (A có hoành độ âm)

Phương trình đường thẳng AC đi qua A và $K \Rightarrow AC: x+3y-5=0$

C là giao điểm của (C) và $AC \Rightarrow C(5;0)$

M là giao điểm của AC và $MN \Rightarrow M(-1;2)$

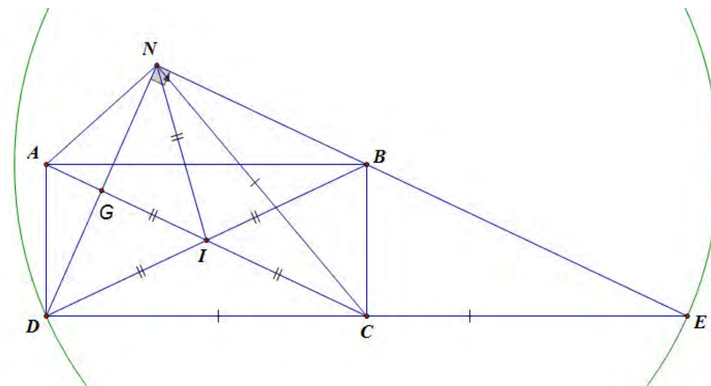
Phương trình đường thẳng BM đi qua M và vuông góc với $AC \Rightarrow BM: 3x - y + 5 = 0$

B là giao điểm của (C) và $BM \Rightarrow B(-3;-4)$ hoặc $B(0;5)$

Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 78 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình chữ nhật $ABCD$ có đỉnh $A(-3;1)$ và điểm C nằm trên đường thẳng $(d): x - 2y - 5 = 0$. Gọi E là giao điểm thứ hai của đường tròn tâm B bán kính BD với đường thẳng CD. Hình chiếu vuông góc của D xuống đường thẳng BE là điểm $N(6;-2)$. Xác định tọa độ các đỉnh B, C, D của hình chữ nhật.

Lời giải tham khảo



Gọi I là tâm hình chữ nhật $ABCD$. Tam giác DNB vuông tại N có I là trung điểm của $BD \Rightarrow ID = IN = IB$

Xét tam giác ANC có I là trung điểm của AC và $IA = IN = IC \Rightarrow \Delta ANC$ vuông tại N hay NC $\perp$ AN

Phương trình đường thẳng NC đi qua N và vuông góc với AN $\Rightarrow NC: 3x - y - 20 = 0$

C là giao điểm của NC và $(d) \Rightarrow C(7;1)$, I là trung điểm của AC $\Rightarrow I(2;2)$

Dễ dàng chứng minh được $\Delta NIC = \Delta DIC \Rightarrow$ AC là trung trực của DN

Phương trình đường thẳng AC : y - 1 = 0

Phương trình đường thẳng DN đi qua N và vuông góc với AC $\Rightarrow DN: x - 6 = 0$

G là giao điểm của DN và AC $\Rightarrow G(6;1)$, G là trung điểm của DN $\Rightarrow D(6;4)$

I là trung điểm của BD $\Rightarrow B(-2;0)$

Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 79 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình bình hành $ABCD$ có tam giác ABD vuông cân nội tiếp đường tròn $(C) : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$. Biết hình chiếu vuông góc của B và D xuống đường chéo AC lần lượt là $H\left(\frac{22}{5}; \frac{14}{5}\right)$ và $K\left(\frac{13}{5}; \frac{11}{5}\right)$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình bình hành $ABCD$ biết B, D có tung độ dương và $AD = 3\sqrt{2}$.

Lời giải tham khảo

Đầu tiên ta cần xác định tam giác ABD vuông tại đâu

- Nếu vuông tại A thì suy ra ABCD là hình vuông $\Rightarrow$ vô lý
- Nếu vuông tại B thì ta có $AD = 2R = 6 \neq 3\sqrt{2} \Rightarrow$ vô lý

Do đó tam giác ABD vuông cân tại D

Gọi I là giao điểm của hai đường chéo hình bình hành, khi đó I là trung điểm của HK $\Rightarrow I\left(\frac{7}{2}; \frac{5}{2}\right)$

Phương trình đường thẳng AC đi qua H và K $\Rightarrow AC : x - 3y + 4 = 0$

A là giao điểm của (C) và AC $\Rightarrow A(-1; 1)$

(C) có tâm $E(2; 1)$, E chính là trung điểm của AB $\Rightarrow B(5; 1)$

Từ đây dễ dàng suy ra tọa độ điểm C và D.

Đề bài 80 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD có hai điểm E và F lần lượt nằm trên hai cạnh AB và AD sao cho $BE = 2AE, FA = 3FD$, biết điểm $F(2; 1)$. Đường thẳng CE có phương trình $x - 3y - 9 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD biết tam giác CEF vuông tại F và đỉnh C có hoành độ dương.

Lời giải tham khảo

Đặt cạnh $AB = 3a = CD, AD = BC = 4a \Rightarrow EB = 2a, EA = a, AF = 3b, DF = b$

Tam giác ΔAEF vuông tại $A \Rightarrow EF^2 = a^2 + 9b^2$

Tam giác ΔBCE vuông tại $B \Rightarrow CE^2 = 4a^2 + 16b^2$

Tam giác ΔDCF vuông tại $D \Rightarrow CF^2 = 9a^2 + b^2$

Tam giác ΔCEF vuông tại $F \Rightarrow 4a^2 + 16b^2 = 10a^2 + 10b^2 \Leftrightarrow a = b$

$\Rightarrow EF^2 = CF^2 = 10a^2 \Rightarrow \Delta CEF$ vuông cân tại $F \Rightarrow \widehat{FCE} = 45^o$

Giả sử $\overrightarrow{n} = (a; b)$ là vecto pháp tuyến của đường thẳng CF, vtpt của CE là $\overrightarrow{n_1} = (1; -3)$

$$\Rightarrow \frac{|a-3b|}{\sqrt{10}.\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 2a^2 + 3ab - 2b^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -2b \\ a = \frac{b}{2} \end{array}\right.$$

- Với $b = 2a \Rightarrow \overrightarrow{n} = (1; 2)$, phương trình đường thẳng $CF : x + 2y - 4 = 0$

  C là giao điểm của CF và CE $\Rightarrow C\,(6; -1)$ (thỏa mãn C có hoành độ dương)

  Phương trình đường thẳng EF đi qua F và vuông góc với CF $\Rightarrow EF : 2x - y - 3 = 0$

  E là giao điểm của CE và EF $\Rightarrow E\,(0; -3)$

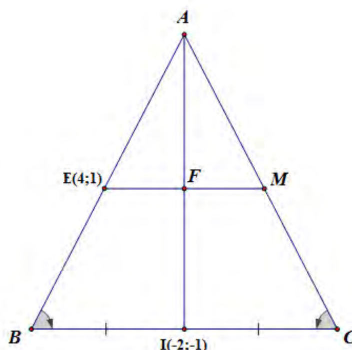
  D là giao điểm của đường tròn tâm C bán kính $CD = 3a = 3\sqrt{2}$ và đường tròn tâm F bán kính $FD = b = \sqrt{2}D\,(3; 2)$

  Đến đây bài toán đơn giản rồi

- Với $a = -2b$ xét tương tự

Đề bài 81 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC cân tại A, phương trình cạnh BC là $(d) : 2x - y + 3 = 0$. Điểm I là trung điểm của cạnh BC, điểm $E\,(4; 1)$ nằm trên cạnh AB. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết diện tích tam giác ABC bằng 90.

Lời giải tham khảo



Tam giác ABC cân tại $A \Rightarrow AI$ là vừa là đường cao vừa là đường phân giác góc A

Phương trình đường phân giác AI đi qua A và vuông góc với $BC \Rightarrow AI : x + 2y + 4 = 0$

Qua E kẻ đường thẳng vuông góc với AI cắt AI và AC tại F và M.

Phương trình đường thẳng EM đi qua E vuông góc với $AI \Rightarrow EM : 2x - y - 7 = 0$

Tọa độ điểm F là giao điểm của EM và $AI \Rightarrow F\,(2; -3)$. F là trung điểm của $EM \Rightarrow M\,(0; 7)$

Lấy điểm $B\,(b; 2b + 3) \in BC \Rightarrow C\,(-4 - b; 5 - 2b)$

Tam giác ABC cân tại $A \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ hay $(BE, BC) = (MC, BC)$

$\overrightarrow{BE} = (b - 4; 2b - 2)\,, \overrightarrow{MC} = (4 + b; 2b - 2)\,, \overrightarrow{BC} = (1; 2)$

$$\Rightarrow \frac{|b - 4 + 2b - 4|}{\sqrt{5}.\sqrt{5b^2 - 16b + 20}} = \frac{|5b|}{\sqrt{5}.\sqrt{5b^2 + 20}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 1 \\ b = 4 \end{array}\right.$$

- Với $b = 1 \Rightarrow B(1;5) \Rightarrow C(-5;-7) \Rightarrow BC = 6\sqrt{5}$

  $S = \frac{1}{2}.AI.BC = 90 \Rightarrow AI = 6\sqrt{5}$. Lấy điểm $A(-2a-4;a) \in AI$

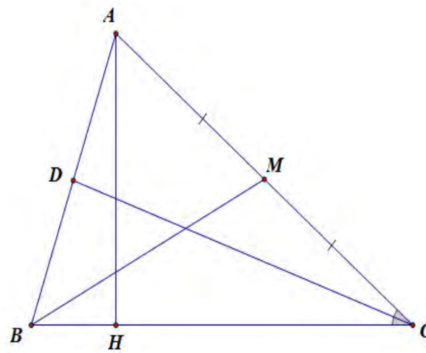
  $\Rightarrow AI^2 = (2a+2)^2 + (a+1)^2 = 90 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 5 \\ a = -7 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A(-14;5) \\ A(10;-7) \end{array}\right.$

- Với $b = 4$ xét tương tự

Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 82 : Trong hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác ABC biết đường cao kẻ từ A, trung tuyến kẻ từ B và phân giác kẻ từ C có phương trình lần lượt là $(d_1): 3x - 4y + 27 = 0; (d_2): 4x + 5y - 3 = 0; (d_3): x + 2y - 5 = 0$. Xác định tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải tham khảo :



Ta có $AH \perp BC \Rightarrow BC$ có vtcp là $\overrightarrow{u_4} = (3;-4)$

Gọi $\overrightarrow{u_5} = (a;b)$ là vtcp của đường thẳng AC. Ta có CD là phân giác trong góc C

$\Rightarrow \cos(\overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{u_4}) = \cos(\overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{u_5})$ $\qquad \overrightarrow{u_3} = (2;-1)$

$$\Rightarrow \frac{|2a-b|}{\sqrt{5}.\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}.\sqrt{25}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ b = -\frac{4}{3}a \end{array}\right.$$

Với $b = -\frac{4}{3}a \Rightarrow$ chọn $\overrightarrow{u_5} = (3;-4)$ loại vì trùng với $\overrightarrow{u_4}$

Với $b = 0 \Rightarrow \overrightarrow{u_5} = (1;0)$

Điểm $A \in (d_1) \Rightarrow A(-1+4a; 6+3a)$ và $C \in (d_3) \Rightarrow C(5-2c;c) \Rightarrow \overrightarrow{AC} = (6-2c-4a; c-3a-6)$

Ta có $\overrightarrow{u_5}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương $\Rightarrow c - 3a - 6 = 0$ $\qquad (1)$

M là trung điểm của AC $\Rightarrow M\left(\frac{4a+4-2c}{2}; \frac{3a+c+6}{2}\right)$. Trung điểm M thuộc (d_2)

$$\Rightarrow 4.\frac{4a+4-2c}{2} + 5.\frac{3a+c+6}{2} - 3 = 0 \Leftrightarrow 31a - 3a + 40 = 0 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow a = 1; c = 3 \Rightarrow A(-5;3); C(-1;3)$

Phương trình đường thẳng BC đi qua C và vuông góc với AH $\Rightarrow BC: 4x + 3y - 5 = 0$

B là giao điểm của BM và BC $\Rightarrow B(2;-1)$

Bài toán cở bản : Biết tọa độ 3 đỉnh tam giác tìm tọa độ tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác. Tâm $I\left(-3;-\frac{13}{8}\right)$ và $R = \frac{5\sqrt{65}}{8}$.

Đề bài 83 : Trong hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $M(-1;-1), N(0;2)$ lần lượt là trung điểm của AB và AC. Điểm $D(1;0)$ là chân đường phân giác trong góc A. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Lời giải tham khảo :

Phương trình đường thẳng BC đi qua D và song song với MN $\Rightarrow BC: 3x - y - 3 = 0$

Điểm $B \in BC \Rightarrow B(b; 3b-3)$

M là trung điểm của AB $\Rightarrow A(-2-b; 1-3b)$, N là trung điểm của AC $\Rightarrow C(2+b; 3+3b)$

Ta có $DB^2 = (1-b)^2 + (3-3b)^2 = 10(b-1)^2$

$DC^2 = (b+1)^2 + (3+3b)^2 = 10(b+1)^2$

$AB^2 = 4(b+1)^2 + 4(3b-2)^2 = 20\left(2b^2 - 2b + 1\right)$

$AC^2 = 4(b+2)^2 + 4(3b+1)^2 = 20\left(2b^2 + 2b + 1\right)$

AD là phân giác góc $\widehat{BAC} \Rightarrow \frac{DB}{AB} = \frac{DC}{AC} \Rightarrow \frac{DB^2}{AB^2} = \frac{DC^2}{AC^2}$

$$\frac{(b-1)^2}{2b^2-2b+1} = \frac{(b+1)^2}{b^2+2b+1} \Leftrightarrow \frac{(b-1)^2}{b^2+(b-1)^2} = \frac{(b+1)^2}{b^2+(b+1)^2} \Leftrightarrow b^2(b-1)^2 = b^2(b+1)^2 \Leftrightarrow b = 0$$

Với $b = 0 \Rightarrow A(-2;1), B(0;-3), C(2;3)$

Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 84 : Trong hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác ABC có đường cao AH, thỏa mãn BC = 3BH. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABH có phương trình $(C): x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$, phương trình đường thẳng AC là $x - y + 2 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết điểm A có tung độ dương.

Lời giải tham khảo :

A có tung độ dương và A là giao điểm của (C) và $AC \Rightarrow A(1;3)$ hoặc $A(0;2)$

- Với $A(1;3)$ có tam giác ABH vuông tại H $\Rightarrow$ tâm đường tròn $I(2;1)$ chình là trung điểm của AB

$\Rightarrow B\left(3;-1\right)$

Điểm $C \in AC \Rightarrow C\left(c;c-2\right)$. Ta có $BC = 3BH \Rightarrow H\left(\frac{c+6}{3};\frac{c}{3}\right)$

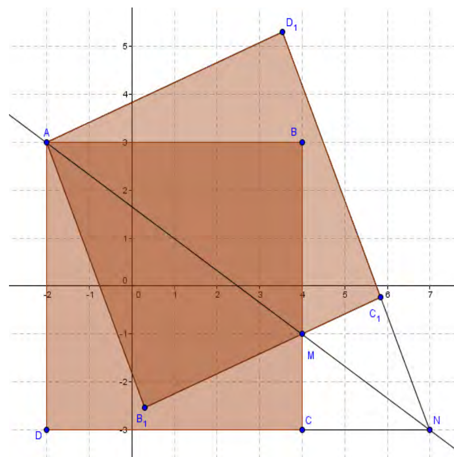
$H \in (C) \Rightarrow \left(\frac{c+6}{3}-2\right)^2+\left(\frac{c}{3}-1\right)^2 = 5 \Rightarrow c = ... \Rightarrow C$

- Với $A\left(0;2\right)$ xét tương tự

Bài toán giải quyết xong.

Đề bài 85 : Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có điểm $A\left(-2;3\right)$. Điểm $M\left(4;-1\right)$ nằm trên cạnh BC, đường thẳng AM cắt đường thẳng DC tại điểm $N\left(7;-3\right)$. Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của hình vuông $ABCD$.

Lời giải tham khảo :



Ta có $MN = \sqrt{13}, AN = 3\sqrt{13}$. Tam giác NAD và tam giác NMC đồng dạng

$\Rightarrow \frac{MN}{AN} = \frac{MC}{AD} = \frac{1}{3} \Rightarrow AD = 3MC \Rightarrow BC = 3MC, BM = 2MC$

Tam giác ABM vuông tại B có $BM^2 + AB^2 = AM^2 \Leftrightarrow BM^2 + \frac{9}{4}BM^2 = 52 \Rightarrow BM = 4 \Rightarrow AB = 6$

$AB = 6 \Rightarrow B \in (C_1) : (x+2)^2 + (y-3)^2 = 36$

$BM = 4 \Rightarrow B \in (C_2) : (x-4)^2 + (y+1)^2 = 14$

B là giao điểm của (C_1) và $(C_2) \Rightarrow B\left(4;3\right)$ hoặc $B\left(\frac{4}{13};-\frac{35}{13}\right)$

- Với $B\left(4;3\right) \Rightarrow$ phương trình đường thẳng BM đi qua B và M $BM : x-4=0$

  Có BM $= 2$MC $\Rightarrow C\left(4;-3\right)$

  Phương trình đường thẳng CD đi qua C và N $\Rightarrow CD : y = -3$

  Có DC $= 2$CN $\Rightarrow D\left(-2;-3\right)$

- Với $B\left(\frac{4}{13};-\frac{35}{13}\right)$ xét tương tự

Đề bài 86 : Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(T): x^2+y^2-4x-2y=0$ và đường phần giác trong góc $\widehat{BAC}$ có phương trình là $x-y=0$. Biết diện tích tam giác ABC bằng ba lần diện tích tam giác IBC với I là tâm đường tròn (T) và điểm A có tung độ dương. Viết phương trình đường thẳng BC.

Lời giải tham khảo :

A là giao điểm của phân giác $x-y=0$ và đường tròn $(T) \Rightarrow A(3;3)$ (do A có tung độ dương)

Giao điểm thứ hai của phân giác $x-y=0$ với (T) là $O(0;0)$ là điểm chính giữa cung BC $\Rightarrow$ IO $\perp$ BC

I là tâm của đường tròn $(T) \Rightarrow I(2;1)$. Phương trình đường thẳng BC vuông góc với ID

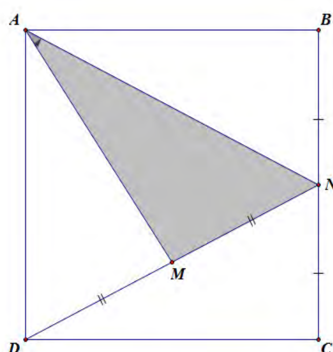
$\Rightarrow$ BC có dạng $(d): 2x+y+\alpha=0$

Ta có diện tích tam giác ABC bằng ba lần diện tích tam giác IBC $\Rightarrow d(A,(d)) = 3d(I,(d))$

$$\Rightarrow \frac{|9+\alpha|}{\sqrt{5}} = \frac{3|5+\alpha|}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\alpha=-3\\ \alpha=-6\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}(d): 2x+y-3=0\\ (d): 2x+y-6=0\end{array}\right.$$

Đề bài 87 : Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho hình vuông ABCD với điểm $N(1;2)$ là trung điểm của BC. Đường thẳng $(d): 5x-y+1=0$ là đường trung tuyến xuất phát từ A của tam giác ADN. Tìm tọa độ A,B,C,D của hình vuông.

Lời giải tham khảo :



Đặt cạnh hình vuông là $AB=2a \Rightarrow BN=CN=a$

Tam giác ABN vuông tại B $\Rightarrow AN^2 = AB^2+BN^2 = 5a^2 \Rightarrow AN = a\sqrt{5} \Rightarrow DN = a\sqrt{5}$

tam giác ADN có AM là đường trung tuyến $\Rightarrow AM^2 = \frac{AN^2+AD^2}{2} - \frac{DN^2}{4} = \frac{13a^2}{4}$

tam giác AMN có $\cos\widehat{MAN} = \frac{AN^2+AM^2-MN^2}{2.AN.AM} = \frac{7}{\sqrt{65}}$

Gọi $\overrightarrow{n} = (a; b)$ là vecto pháp tuyến của đường thẳng AN

$$\Rightarrow \cos\widehat{MAN} = \frac{|5a-b|}{\sqrt{26}.\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{7}{\sqrt{65}} \Leftrightarrow 27a^2 - 50ab - 93b^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 3b \\ a = -\dfrac{31}{27}b \end{array}\right.$$

- Với $a = 3b$ chọn $\overrightarrow{n} = (3; 1) \Rightarrow AN : 3x + y - 5 = 0$

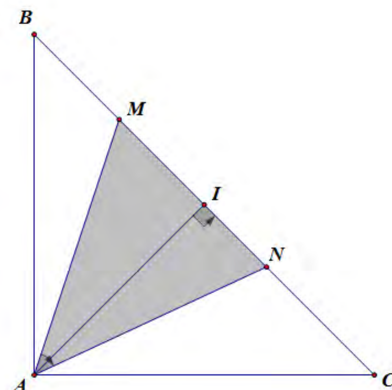
  A là giao điểm của AN và AM $\Rightarrow A\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{7}{2}\right)$

  Đến đây bài toán đơn giản rồi

Đề bài 88 : Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy Cho tam giác ABC vuông cân tại A có I là trung điểm của cạnh BC . Gọi M là trung điểm của IB và N là điểm nằm trên đoạn thẳng IC sao cho $NC = 2NI$. Biết rằng $M\left(\dfrac{11}{2}; -4\right)$, phương trình đường thẳng AN là : $x - y - 2 = 0$ và điểm A có hoành độ âm . Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Lời giải tham khảo :

Tam giác ABC vuông cân tại A $\Rightarrow IA = IB = IC = d$



$\Rightarrow IM = \dfrac{IB}{2} = \dfrac{d}{2}, IN = \dfrac{IC}{3} = \dfrac{d}{3}$

Tam giác AIM vuông tại I $\Rightarrow AM^2 = AI^2 + IM^2 = \dfrac{5d^2}{4}$

Tam giác AIN vuông tại I $\Rightarrow AN^2 = AI^2 + IN^2 = \dfrac{10d^2}{9}$

$MN = IM + IN = \dfrac{5d}{6}$. Xét tam giác AMN có

$\cos\widehat{MAN} = \dfrac{AM^2 + AN^2 - MN^2}{2AM.AN} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

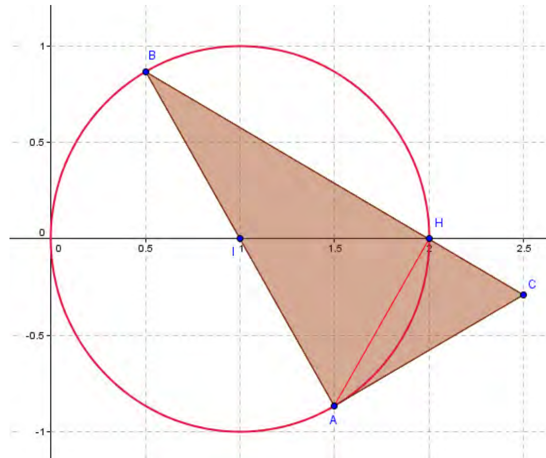
Điểm $A(a; a-2) \in AN$ ta có $\cos\widehat{MAN} = \dfrac{\left|a - \dfrac{11}{2} + a + 2\right|}{\sqrt{2}.\sqrt{\left(a - \dfrac{11}{2}\right)^2 + (a-2)^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow a = -2 \Rightarrow A(-2; -4)$

Ta có $AM = \dfrac{15}{2} \Rightarrow d = 3\sqrt{5} \Rightarrow AN = 5\sqrt{2}, MN = \dfrac{5\sqrt{5}}{2}$. Điểm $N \in AN \Rightarrow N(n; n-2) \Rightarrow N(3; 1)$

Đến đây thì bài toán đơn giản rồi.

Đề bài 89 (THTT lần 1 - 2015) : Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho đường tròn $(T) : x^2 + y^2 = 2x$. Tam giác ABC vuông tại A có AC là tiếp tuyến của đường tròn (T) trong đó A là tiếp điểm, chân đường cao kẻ từ A là điểm $H(2; 0)$. Xác định tọa độ đỉnh B của tam giác biết diện tích tam giác ABC là $S = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ và điểm B có tung độ dương.

Lời giải tham khảo :



Đường tròn (T) có tâm $I\,(1;0)$ và bán kính R = 1

Ta có AC là tiếp tuyến của đường tròn $(T) \Rightarrow$ đường thẳng AB đi qua điểm I, mặt khác $H \in (T)$

$\Rightarrow IA = IH$ và tam giác ABH vuông tại H $\Rightarrow (T)$ chính là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABH

hay AB là đường kính $AB = 2$

Diện tích tam giác ABC $S = \dfrac{1}{2}AB.AC = \dfrac{1}{2}.2.AC = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow AC = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

Tam giác ABC vuông tại A $\Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$

lại có $S = \dfrac{1}{2}AH.BC = \dfrac{1}{2}.\dfrac{4}{\sqrt{3}}.AH = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow AH = 1$

Tam giác ABH vuông tại H $\Rightarrow BH^2 = AB^2 - AH^2 = 3 \Rightarrow BH = \sqrt{3}$

$\Rightarrow$ B thuộc đường tròn tâm H bán kính $BH = \sqrt{3} \Rightarrow (H) : (x-2)^2 + y^2 = 3$

B là giao điểm của (T) và $(H) \Rightarrow B\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (B có tung độ dương)

Đề bài 90 : Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho hình vuông ABCD. Trên tia đối của tia DA lấy điểm P sao cho $\widehat{ABP} = 60^o$. Gọi $K, M\,(1;2)\,, N\,(1;1)$ theo thứ tự là trung điểm của BP, CP và KD. Xác định tọa độ đỉnh D của hình vuông ABCD.

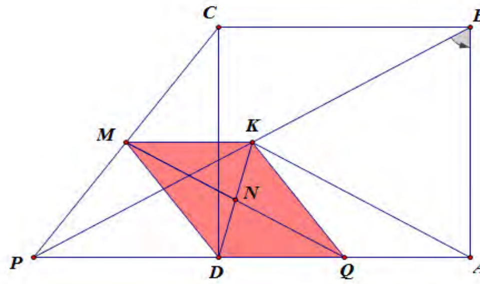
Lời giải tham khảo :

Tam giác CPB có MK là đường trung bình $\Rightarrow$ MK // BC và $MK = \dfrac{1}{2}BC$

Gọi Q là trung điểm của AD $\Rightarrow DQ = \dfrac{1}{2}AD$, do ABCD là hình vuông $\Rightarrow$ MK // DQ và MK = DQ

$\Rightarrow$ MKQD là hình bình hành $\Rightarrow$ MQ cắt KD tại trung điểm mỗi đường $\Rightarrow$ N là trung điểm của MQ

Tam giác AKD có NQ là đường trung bình $\Rightarrow$ AK = 2NQ hay AK = 2MN = 2



Tam giác ABP vuông tại A có K là trung điểm của cạnh huyền BP $\Rightarrow$ AK = KB = KP = 2 và

$\widehat{ABP} = 60^o \Rightarrow$ tam giác ABK đều $\Rightarrow$ AB = 2 $\Rightarrow DQ = 1$, N là trung điểm của MQ $\Rightarrow Q\left(1;0\right)$

Tam giác AKD cân tại A và có góc $\widehat{KAD} = 30^o \Rightarrow DK^2 = AK^2 + AD^2 - 2.AD.AK.\cos\widehat{KAD} = 8 - \sqrt{3}$

$\Rightarrow KD = \sqrt{8-\sqrt{3}} \Rightarrow ND = \dfrac{1}{2}KD = \dfrac{\sqrt{8-\sqrt{3}}}{2}$

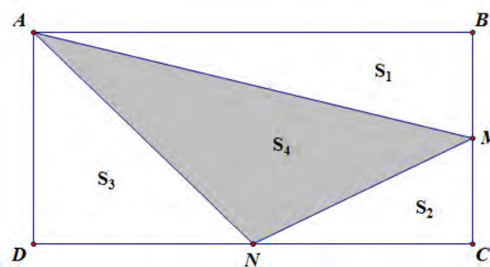
Có $ND = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \Rightarrow$ D thuộc đường tròn tâm N bán kính ND $(N):(x-1)^2+(y-1)^2 = \dfrac{8-\sqrt{3}}{4}$

QD = 1 $\Rightarrow$ D thuộc đường tròn tâm Q bán kính QD $(Q):(x-1)^2+y^2 = 1$

D là giao điểm của (N) và (Q).

Đề bài 91 : Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho cho hình chữ nhật ABCD có diện tích bằng $2\sqrt{2}$. Gọi $M(0;1)$, N lần lượt là trung điểm của BC và CD. Đường thẳng AN có phương trình $2\sqrt{2}x + y - 4 = 0$. Tìm tọa độ điểm A.

Lời giải tham khảo :



Đặt cạnh hình chữ nhật $AB = CD = 2a, AD = BC = 2b \Rightarrow BM = CM = b, CN = DN = b$

theo hình vẽ ta có $S_1 = \dfrac{1}{2}.2a.b = ab, S_2 = \dfrac{1}{2}ab, S_3 = \dfrac{1}{2}2b.a = ab, S_{ABCD} = 4ab = 2\sqrt{2} \Rightarrow ab = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (1)

$\Rightarrow S_4 = S_{ABCD} - S_1 - S_2 - S_3 = 4ab - ab - ab - \dfrac{ab}{2} = \dfrac{3ab}{2} = \dfrac{3}{2\sqrt{2}}$

$d\left(M,AN\right) = 1,\ S_4 = \dfrac{1}{2}.AN.d\left(M,AN\right) = \dfrac{1}{2}.AN = \dfrac{3}{2\sqrt{2}} \Rightarrow AN = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

Tam giác ADN vuông tại D $\Rightarrow AN^2 = a^2 + 4b^2 = \dfrac{9}{2}$ (2)

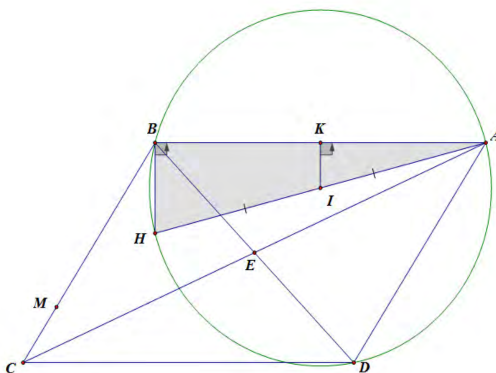
từ (1) và (2) $\Rightarrow a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, b = 1 \Rightarrow AB = \sqrt{2}, AD = 2 \Rightarrow AM = \sqrt{3}, MN = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$

xét tam giác AMN có $\cos\widehat{MAN} = \dfrac{AM^2 + AN^2 - MN^2}{2.AM.AN} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

Đến đây bài toán đơn giản rồi (viết phương trình đường thẳng AM qua điểm M và tạo với AN góc cho trước)

Đề bài 92 : Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho cho hình bình hành ABCD, trực tâm của tam giác BCD là $H(4;0)$, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD là $I\left(2;\dfrac{3}{2}\right)$, điểm B thuộc đường thẳng $3x - 4y = 0$ và BC đi qua $M(5;0)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình bình hành ABCD, biết điểm B có hoành độ dương.

Lời giải tham khảo :



Gọi K là trung điểm của AB, do I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD $\Rightarrow$ IK $\perp$ AB

H là trực tâm tam giác BCD $\Rightarrow$ BH $\perp$ CD hay BH $\perp$ AB do đó tam giác ABH vuông tại B

Xét ΔABH có IK // BH và K là trung điểm của AB nên IK đi qua trung điểm của AH

Đường tròn tâm I ngoại tiếp tam giác ABD từ đó $\Rightarrow$ HA là đường kính đường tròn ngoại tiếp ΔABD

I là trung điểm của AH $\Rightarrow A\,(0;3)$

Đề bài 93 : Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 135^o$, trực tâm $H(-1;1)$, trung điểm của cạnh BC là $M\left(\dfrac{11}{2};\dfrac{13}{2}\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết phương trình đường cao BH là $x - 3y + 4 = 0$.

Lời giải tham khảo :

Điểm $B \in BH \Rightarrow B(3b-4;b)$, M là trung điểm của BC $\Rightarrow C(15-3b;13-b) \Rightarrow \overrightarrow{CH} = (16-3b;12-b)$

Ta có AB $\perp$ CH $\Rightarrow \overrightarrow{CH}$ là vecto pháp tuyến của đường thẳng AB

ta có $\widehat{BAC} = 135^o \Rightarrow \widehat{ABH} = 45^o$

$$\Rightarrow \cos\widehat{ABH} = \frac{|16-3b-3(12-b)|}{\sqrt{10}.\sqrt{(16-3b)^2+(12-b)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow b^2-12b+32=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=8 \\ b=4 \end{array}\right.$$

- Với $b=8 \Rightarrow B(4;8) \Rightarrow C(3;9)$

  Phương trình AH đi qua H và vuông góc với BC $\Rightarrow AH: x-y+2=0$

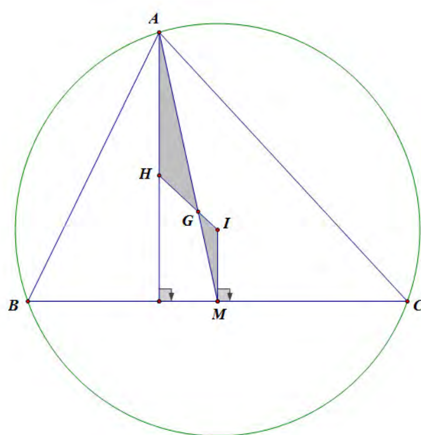
  Phương trình AC đi qua C và vuông góc với BH $\Rightarrow AC: 3x+y-18=0$

  A là giao điểm của AH và AC $\Rightarrow A(4;6)$

- Với $b=4$ xét tương tự

Đề bài 94 : Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $I(2;1)$, bán kính bằng 5. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết tam giác ABC có trực tâm $H(-1;-1), \sin\widehat{BAC} = \dfrac{4}{5}$ và điểm A có hoành độ âm.

Lời giải tham khảo :



Ta có diện tích Δ ABC là $S = \dfrac{AB.AC.BC}{4R} = \dfrac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{BAC} \Rightarrow BC = 8$

Gọi M là trung điểm của BC dễ tính được IM = 3, gọi G là trọng tâm của tam giác ABC

có $\dfrac{AH}{IM} = \dfrac{HG}{GO} = 2 \Rightarrow AH = 6$

Có AH = 6 và IA = 5 từ đây suy ra điểm A

Bài toán đến đây đơn giản rồi

Đề bài 95 : Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác ABC có trung điểm của cạnh BC là điểm $M(3;-1)$, đường thẳng chứa đường cao kẻ từ đỉnh B đi qua điểm $E(-1;-3)$ và đường thẳng chứa cạnh AC đi qua điểm $F(1;3)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết rằng điểm đối xứng của đỉnh A qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là điểm $D(4;-2)$.

Lời giải tham khảo :

Gọi H là trực tâm của tam giác ABC dễ dàng chứng minh được BHCD là hình bình hành

$\Rightarrow$ M là trung điểm của HD $\Rightarrow H(2;0)$

Phương trình đường BH đi qua E và H $\Rightarrow BH : x - y - 2 = 0$

Phương trình đường thẳng AC đi qua điểm F và vuông góc với BH $\Rightarrow AC : x + y - 4 = 0$

Phương trình đường thẳng CD đi qua D và vuông góc với AC $\Rightarrow CD : x - y - 6 = 0$

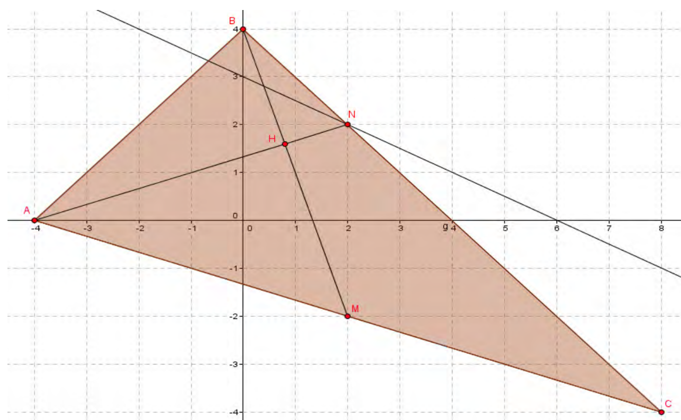
C là giao điểm của AC và CD $\Rightarrow C(5;-1)$, M là trung điểm của BC $\Rightarrow B(1;-1)$

Phương trình đường cao AH đi qua H và vuông góc với BC $\Rightarrow AH : x - 2 = 0$

A là giao điểm của AH và AC $\Rightarrow A(2;2)$.

Đề bài 96 (k2pi - Lần 3 - 2015) : Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác ABC vuông tại B có $BC = 2AB$, điểm $M(2;-2)$ là trung điểm của AC. Gọi N là điểm trên BC sao cho $BN = \frac{1}{4}BC$. Điểm $H\left(\frac{4}{5};\frac{8}{5}\right)$ là giao điểm của AN và BM. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết N thuộc đường thẳng $(d) : x + 2y - 6 = 0$.

Lời giải tham khảo :



Tam giác ABC vuông tại B có M là trung điểm của $AC \Rightarrow MA = MB = MC \Rightarrow \widehat{BCA} = \widehat{CBM}$

Tam giác ABC vuông tại $B \Rightarrow \tan\widehat{BCA} = \dfrac{BA}{BC} = \dfrac{1}{2}$

Tam giác ABN vuông tại $B \Rightarrow \tan\widehat{BAN} = \dfrac{BN}{AB} = \dfrac{BC}{4AB} = \dfrac{1}{2}$

do đó $\widehat{BCA} = \widehat{BAN} \Rightarrow \widehat{CBM} = \widehat{BAN}$, có $\widehat{BNA} + \widehat{BAN} = 90^o$

$\Rightarrow \widehat{CBM} + \widehat{BNA} = 90^o \Rightarrow \Delta BNH$ vuông tại H $\Rightarrow$ BM $\perp$ AN

Phương trình đường thẳng NH đi qua H và vuông góc với MH $\Rightarrow NH : x - 3y + 4 = 0$

N là giao điểm của NH và $(d) \Rightarrow N(2;2)$

Tam giác BAH vuông tại H có $\tan\widehat{BAH} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow AH = 2BH$

tam giác BNH vuông tại H có $\tan\widehat{CBM} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow BH = 2NH \Rightarrow AH = 4HN$

điểm $A \in NH \Rightarrow A(3a-4;a)$ đồng thời $AH = 4HN \Rightarrow \overrightarrow{AH} = 4\overrightarrow{HN} \Rightarrow A(-4;0)$

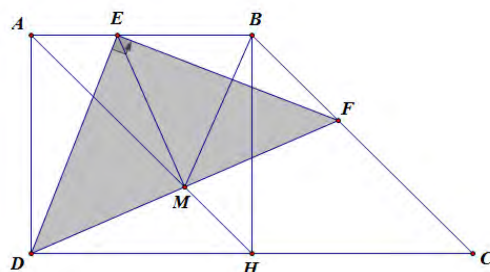
M là trung điểm của AC $\Rightarrow C(8;-4)$

Phương trình đường thẳng BC đi qua C và N $\Rightarrow BC : x + y - 4 = 0$

Phương trình đường thẳng BM đi qua H và M $\Rightarrow BM : 3x + y - 4 = 0 \Rightarrow B(0;4)$

Đề bài 97 (boxmath - Lần 1 - 2015) : Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho hình thang ABCD vuông tại A và D có CD = 2AB = 2AD. Điểm $E(3;4)$ nằm trên cạnh AB, đường thẳng (d) đi qua E và vuông góc với DE cắt đường thẳng BC tại điểm $F(6;3)$. Xác định tọa độ các đỉnh D của hình thang ABCD biết đỉnh D có tung độ nhỏ hơn 2.

Lời giải tham khảo :



Kẻ BH vuông góc với CD, tứ giác ABHD có $\widehat{BAD}=\widehat{ADH}=\widehat{BHD}=90^0$

$\Rightarrow ABHD$ là hình chữ nhật $\Rightarrow HD = AD \Rightarrow HD = \dfrac{1}{2}$ CD = HC

Hình chữ nhật ABHD có $AB = AD \Rightarrow ABHD$ là hình vuông $\Rightarrow HB = HD = HC$

Tam giác BHC vuông cân ở $H \Rightarrow \widehat{HBC} = 45^o$

Mà ABHD là hình vuông $\Rightarrow \widehat{DBH} = 45^o \Rightarrow \widehat{DBC} = \widehat{DBH} + \widehat{HBC} = 90^o$

Gọi M là trung điểm của DE. Tam giác EDF vuông ở E có $EM = \dfrac{1}{2}DF$

Tam giác DBF vuông ở B có BM là trung tuyến ứng với cạnh huyền $\Rightarrow BM = MF = \frac{1}{2}DF$

$\Rightarrow EM = BM \Rightarrow$, tam giác EMB cân ở M $\Rightarrow \widehat{MEB} = \widehat{EBM}$

Tam giác ABD vuông cân ở A $\Rightarrow \widehat{ABD} = 45^o \Rightarrow \widehat{ABC} = 90^o + 45^o = 135^o$

Tam giác BMF cân ở M $\Rightarrow \widehat{MFB} = \widehat{MBF}$

Ta có $\widehat{MEB} + \widehat{MFB} = \widehat{MBE} + \widehat{MBF} = \widehat{ABC} = 135^o$

Tứ giác MEBF có $\widehat{ABC} + \widehat{MEB} + \widehat{MFB} = 135^0 + 135^o = 270^o$

$\Rightarrow \widehat{EMF} = 360^o - 270^o = 90^o \Rightarrow$ EM vuông góc với DF

Tam giác EDF có EM vừa là trung tuyến vừa là phân giác $\Rightarrow$ tam giác EDF cân ở E $\Rightarrow ED = EF$

Đến đây thì đơn giản rồi.

Đề bài 98 (boxmath) : Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác ABC với $A(0;6), B(-2;0), C(5;0)$. $MNPQ$ là hình vuông nội tiếp trong tam giác ABC sao cho M, N thuộc cạnh BC, P thuộc cạnh AC , Q thuộc cạnh AB. Tìm tọa độ các điểm M, N, P, Q

Lời giải tham khảo :

ta có $AB : 3x - y + 6 = 0, BC : y = 0, AC : 6x + 5y - 30 = 0$

M, N thuộc cạnh $BC \Rightarrow M(m;0), N(n;0)$

$MNPQ$ là hình vuông MQ ⊥ BC $\Rightarrow Q(m; 3m+6)$ (do $Q \in AB$) và NP ⊥ BC $\Rightarrow N\left(n; 5 - \frac{6}{5}n\right)$

MNPQ là hình vuông $\Rightarrow$ MN // PQ $\Rightarrow 3m - 6 = 5 - \frac{6}{5}n \Leftrightarrow 15m + 6n = -5$ (1)

đồng thời MN = MQ $\Rightarrow 3m - 6 = |m - n|$ (2)

từ (1) và (2) $\Rightarrow$ MNPQ

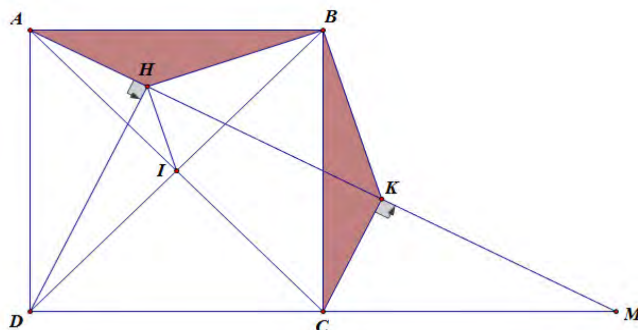
Đề bài 99 (boxmath) : Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho hình vuông ABCD có điểm B thuộc đường thẳng $(d) : 5x + 3y - 10 = 0$. Gọi M là điểm đối xứng với D qua C, H và $K(1;1)$ lần lượt là hình chiếu của D, C lên AM. Xác định tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD biết phương trình đường thẳng đi qua H và tâm I của hình vuông là $(d_1) : 3x + y + 1 = 0$.

Lời giải tham khảo :

Tam giác MDH vuông tại H có CK // DH $\Rightarrow$ K là trung điểm của MH

hai tam giác ADM và DHM đồng dạng $\Rightarrow \frac{AD}{DM} = \frac{DH}{MH} = \frac{1}{2} \Rightarrow DH = HK = KM$

dễ thấy hai tam giác $\Delta ADH = \Delta MCK \Rightarrow$ AH = CK, lại có $\widehat{BAH} = \widehat{BCK}$



do đó $\Delta BAH = \Delta BCK \Rightarrow BH = BK$ và $\widehat{ABH} = \widehat{KBC} \Rightarrow \widehat{ABH} + \widehat{HBC} = \widehat{KBC} + \widehat{HBC} = 90^o$

$\Rightarrow$ BH $\perp$ BK hay tam giác BHK vuông cân tại B $\Rightarrow \widehat{BHK} = 45^o$

ta có ΔDHI $= \Delta$KHI $\Rightarrow \widehat{KHI} = \widehat{DHI} = 45^o \Rightarrow \widehat{BHI} = \widehat{BHK} + \widehat{KHI} = 90^o$

$\Rightarrow$ BH $\perp$ HI hay BK // HI (cùng vuông góc với BH)

Phương trình đường thẳng BK đi qua K và song song với HI $\Rightarrow BK : 3x + y - 4 = 0 \Rightarrow B\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$

Phương trình BH đi qua B và vuông góc với HI $\Rightarrow BH : x - 3y + 7 = 0 \Rightarrow H(-1; 2)$

K là trung điểm của MH $\Rightarrow M(3; 0)$

Phương trình BI đi qua điểm B và vuông góc với BM $\Rightarrow BI : x - y + 2 = 0 \Rightarrow I\left(-\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right)$

I là trung điểm của BD $\Rightarrow D(-2; 0)$

C là trung điểm của DM $\Rightarrow C\left(\frac{1}{2}; 0\right) \Rightarrow A\left(-2; \frac{5}{2}\right)$

Đề bài 100 : Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD có tọa độ điểm $B(2; 0)$, đường thẳng đi qua đỉnh B và vuông góc với đường chéo AC có phương trình (d) : $7x - y - 14 = 0$, đường thẳng đi qua đỉnh A và trung điểm BC có phương trình là $(d_1) : x + 2y - 7 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật biết đỉnh A có hoành độ âm.

Lời giải tham khảo :

Điểm $A \in (d_1) \Rightarrow A(7 - 2a; a)$, gọi F là trung điểm của BC $\Rightarrow F \in (d_1) \Rightarrow F(7 - 2b; b)$

ta có BF $\perp$ AB $\Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BF} \Rightarrow (5 - 2a)(5 - 2b) + ab = 0 \qquad (1)$

F là trung điểm của BC $\Rightarrow C(12 - 4b; 2b)$, ta có AC $\perp (d)$

$\Rightarrow (5 + 2a - 4b) + 7(2b - a) = 0 \qquad (2)$

từ (1) và (2) $\Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(-1; 4) \\ F\left(4; \frac{3}{2}\right) \Rightarrow C(6; 3) \end{cases}$

Gọi I là tâm của hình chữ nhật $\Rightarrow I\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{7}{2}\right) \Rightarrow D\left(3;7\right)$.